**Durée :** 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

CONCOURS D ADMISSION SIGMA n°1 2019
**Concepteur : M Leboucher**

# OPTION ÉCONOMIQUE

# MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 Novembre 2019 - De 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute* ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

*Il est conseillé de rédiger chaque exercice sur une copie différente.*

# Exercice 1 - Inspiré ESLSCA-ISC 99

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

## A) Étude de la suite $u$.

1. Étude de $f$.
   (a) Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$.
   (b) Déterminer la dérivée de $f$ et préciser son domaine de dérivabilité.
   (c) Déterminer les limites de $f$ aux bords de son domaine de définition.
   (d) Tracer le tableau de variation de $f$.
   (e) Résoudre l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) > x$.
   (f) Tracer la courbe représentative de $f$ et la droite d'équation $y = x$.
2. Dans cette partie, on suppose que $u_0 = 0$.
   (a) Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un entier $n$ et qui affiche $u_n$.
   (b) Vérifier que $u$ est bien définie.
   (c) Montrer que la suite $u$ est majorée par 1.
   (d) Montrer que la suite est croissante.
3. Dans cette partie, on suppose que $u_0 > 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien définie et $u_n > 1$.
   (b) Montrer que la suite est décroissante.

## B) Calcul de $u_n$ en fonction de $n$ quand $u_0 > 1$.

On suppose désormais que $u_0 > 1$.

1. Étude de fonctions auxiliaires.
   On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $ch$ et $sh$ par $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   (a) Exprimer les dérivées des fonctions $ch$ et $sh$ en fonction de $ch$ et $sh$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x$, $ch(x) > 0$. Calculer $sh(0)$ et déterminer le signe de $sh(x)$.
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $ch(\alpha) = u_0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel $x$,
   $$2\left(ch\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = ch(x)$$
   (b) En déduire que pour tout entier $n$,
   $$u_n = ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

## C) Une autre suite.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $sh(x) = n$ a une unique solution **positive** que l'on notera $v_n$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $sh(x) < e^x$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n > \ln(n)$.

# Exercice 2 - Inspiré ECRICOME 2001

Dans cet exercice, on étudie les matrices de la forme suivante ($a$ est un nombre réel) :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

## A) Des cas particuliers.

1. Lorsque $a = 0$, quelles sont les matrices $M(0)$ et $N(0)$ ?
2. Quelle particularité partage les matrices $N(a)$ et $M(a)$ ?
3. On s'intéresse désormais à la matrice

$$N(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.

   (b) Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (N(1))^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1+(-1)^{n+1} \\ 1+(-1)^{n+1} & 1+(-1)^n \end{pmatrix}$$

## B) Étude générale de $N(a)$

1. Résoudre l'équation $(1-a)^2 - a^2 = 0$ d'inconnue $a$.
2. Montrer que $N(a)$ est inversible si et seulement si $a \neq \frac{1}{2}$ et déterminer alors son inverse quand c'est possible.
3. On introduit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P$ est inversible et déterminer $P^{-1}$.
4. Déterminer la matrice $D(a) = P^{-1}N(a)P$.
5. Montrer que $N(a) = PD(a)P^{-1}$.
6. Montrer par récurrence que $(N(a))^n = P(D(a))^n P^{-1}$.
7. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(a)^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+(1-2a)^n & 1-(1-2a)^n \\ 1-(1-2a)^n & 1+(1-2a)^n \end{pmatrix}$$

## C) Étude générale de $M(a)$

1. Montrer que, pour tous réels a,b, on a : $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. Montrer que si $a \neq 1/3$ il existe alors un réel $b$ tel que $a+b-3ab = 0$. En déduire que si $a \neq 1/3$ alors la matrice $M(a)$ est inversible.
3. Calculer $M(1/3)^2$ et en déduire que $M(1/3)$ n'est pa sinversible.
4. Déterminer le réel $a_0$ non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

5. On considère les matrices :
$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$
où $I$ désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que pour tout $a$, il existe un réel $\alpha$ -que l'on exprimera en fonction de $a$- tel que :
$$M(a) = P + \alpha Q$$
   (b) Calculer $P^2$, $QP$, $PQ$, $Q^2$.
   (c) Pour tout entier naturel $n$, non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit $x_nP + y_nQ$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites vérifiant une relation de récurrence que l'on déterminera.
   (d) Montrer alors que
$$[M(a)]^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2a^n & 1-a^n & 1-a^n \\ 1-a^n & 1+2a^n & 1-a^n \\ 1-a^n & 1-a^n & 1+2a^n \end{pmatrix}$$

# Exercice 3 - Probabilités

On considère une roue de loterie composée de 12 secteurs, numérotés de 1 à 12. Un croupier fait tourner cette roue devant un repère et on considère qu'à chaque lancer, chaque secteur à la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
Un joueur choisit à chaque partie un ou plusieurs numéros parmi les 12. Il est gagnant si l'un des numéros choisis apparaît à l'arrêt de la roue.
Le joueur adopte la tactique suivante :
- il mise sur un seul numéro lors de la première partie,
- s'il perd à la $n$-ème partie ($n \geq 1$), il mise sur 2 numéros à la partie suivante ; s'il gagne à la $n$-ème partie, il mise sur 3 numéros à la partie suivante.

1. Déterminer $p_1$ et $p_2$.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n$ la probabilité de l'événement $A_n$ : "le joueur gagne la $n$-ème partie.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$
   (b) En déduire l'expression de $p_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Dans cette question, on fixe $n \geq 2$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $B_k$ l'événement : "le joueur gagne une seule fois lors de $n$-parties et cette victoire a lieu lors de la $k$-ème partie".
   (a) Exprimer $B_n$ à l'aide des événements $A_k$ et en déduire $P(B_n)$.
   (b) Calculer $P(B_1)$.
   (c) Calculer, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(B_k)$.
   (d) Soit $C_n$ l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des $n$ parties". Exprimer $C_n$ à l'aide des événements $B_k$ et en déduire $P(C_n)$.
4. **Étude Scilab.** On rappelle que la fonction `rand()` permet d'obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1.
   (a) Que fait l'expression `ceil(12 * rand())` ?
   (b) Recopiez et complétez ce programme Scilab permettant de simuler la première partie (on demandera au joueur quel numéro, il choisit)

```
resultat = ceil(12*rand())
choix_joueur = ................
if ................ then
    disp("Le joueur a gagné")
else
    disp("Le joueur a perdu")
....
```

# Exercice 4 - Inspiré EDHEC 2001

### Partie 1

On pose, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire un script Scilab permettant de demander à l'utilisateur d'entrer un nombre $n$ et qui renvoie $v_n$. (On pourra écrire $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$).
2. Montrer que : $\forall k > 1, \frac{1}{k} \leq ln(k) - ln(k-1)$ (Indication : pensez aux intégrales)
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leq ln(n) + 1$.

### Partie 2

On considère une suite $u$ définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier $n$ :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2. (a) Pour tout entier $k$, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de $u_k^2$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$.
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}.$$

   (b) En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$