**Durée :** 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

# DEVOIR SURVEILLE N°3

## MATHÉMATIQUES

Samedi 7 Mars 2020 - De 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Exercice 1 - ECRICOME ECT 2014

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang $n$ si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au $n$-ième lancer. On note :

— Pour tout entier $n \geq 1$, $F_n$ l'évènement "On obtient FACE au $n$-ième lancer ".
— Pour tout entier $n \geq 2$, $D_n$ l'évènement "On obtient un double PILE au rang $n$ pour la première fois ".
— Pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement :

" PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, FACE, PILE, PILE "

alors l'évènement $D_8$ est réalisé.

1. On lance $n$ fois de suite la pièce de monnaie. On appelle $X$ la variable aléatoire égale au nombre de $PILE$ obtenus au cours de ces $n$ lancers.
   (a) Déterminer la loi de $X$ (une réponse argumentée est attendue). Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable $X$ ainsi que la valeur de $P(X = k)$ lorsque $k \in X(\Omega)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire $X$.
2. On lance 3 fois de suite la pièce de monnaie. On appelle $Y$ la variable aléatoire valant 0 si l'on n'obtient pas PILE et le numéro d'apparition du premier PILE sinon. Par exemple, si les lancers donnent "FACE, PILE, PILE" alors $Y = 2$. Si les lancers donnent "FACE, FACE, FACE" alors $Y = 0$.
   (a) Préciser l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable $Y$
   (b) Déterminer la loi de $Y$, c'est-à-dire la valeur de $P(Y = k)$ lorsque $k \in Y(\Omega)$.
   (c) Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire $Y$.

   On considère à partir de maintenant que l'on effectue une infinité de lancers de pièces.
3. Calculer $v_2$ et $v_3$. Vérifier que :
$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1.$$
4. Soit $n \geq 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'évènement $D_{n+2}$.

   Quel est alors le résultat du second lancer ? A l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que $D_{n+2}$ puisse se réaliser ? Les réponses devront être justifiées. En déduire que :
$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n$$
5. Pour $n \geq 2$, justifier que $P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}$.
6. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n$$
   En outre, d'après la question 3., cette formule est vraie pour $n = 1$.
7. Déterminer pour tout $n \geq 1$, la valeur de $v_n$.
8. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $E_n$ l'évènement "Il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des $n$ premiers lancers".
   (a) Exprimer l'évènement $\overline{E_n}$ en fonction des évènements $D_2, \ldots, D_n$.
   (b) En déduire que $P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k$
   (c) Déterminer $P(E_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 2 - ECRICOME ECT 2014

On considère les fonctions $f$ et $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in ]0;+\infty[, \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de $g$ sur $]0;+\infty[$.
3. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On la note $\alpha$.
4. Justifier que $\alpha \in [1, e]$ et $f(\alpha) = \alpha$.
5. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$ et préciser la monotonie de la fonction $f$.
6. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$
7. Vérifier que :
$$\forall x \in [1, e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$
8. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
9. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$
10. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
11. **Étude Scilab.**
    (a) Écrire une fonction Scilab prenant en argument d'entrée un nombre réel $x$ et permettant de calculer $f(x)$.
    (b) Écrire un script permettant de tracer avec Scilab la fonction $f$ entre 1 et $e$. (On prendra un minimum de 1000 points pour tracer la courbe)
    (c) Écrire une fonction Scilab prenant en argument d'entrée un entier $n$ et donnant le résultat de $u_n$.
    (d) Démontrer que si $n = \left\lfloor \dfrac{\ln(10^5(e-1))}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$ alors $|u_n - \alpha| \leq 10^{-5}$.
    (e) Écrire un script permettant de déterminer (en utilisant la suite $(u_n)$) une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près.

## Exercice 3 - Inspiré de EML 2011

On considère l'application
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto f(x)=xe^{x^2-1}.$$

## Partie I : Étude et représentation graphique de $f$

1. La fonction $f$ admet-elle une parité ? Qu'en déduit-on graphiquement ?
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$.
3. En déduire le sens de variation de $f$.
4. Dresser le tableau de variation de $f$, comprenant les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Résoudre pour $x\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)-x=0$
6. Résoudre pour $x\in\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x)-x>0$
7. Donnez le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $f$ au point $x=0$.
8. Tracer l'allure de $C$. On précisera la tangente au point d'abscisse 0. On tracera sur le même graphique la droite d'équation $y=x$.

## Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à $f$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}^+$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. On suppose dans cette question que $u_0\in]0;1[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in]0;1[$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est alors décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. Déterminer sa limite.
2. On suppose enfin que $u_0>1$.
   (a) Montrer que pour tout $n$, $u_n>1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.
3. Dans cette question $u_0=e$. Écrire un programme Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n\geq 10^{20}$.

## Partie III : Étude d'une intégrale associée à $f$

On considère l'application
$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto F(x)=\int_x^1 f(t)\,dt.$$

1. Calculer $F(-1)$ et $F(0)$.
2. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, à l'aide de $f(x)$.
3. Montrer que l'équation $x+\ln x=e$, d'inconnue $x\in\,]0;+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera $\alpha$, et montrer que : $1<\alpha<e$.
4. Écrire une fonction $f$ prenant en argument d'entrée un réel $x\in\mathbb{R}_+^*$ et donnant la valeur de $x+\ln(x)-e$.
5. Compléter le script de dichotomie suivant permettant de déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-5}$ près.

```
a = ........  // Valeur initiale de la suite a
b = ........  // Valeur initiale de la suite b

while b - a .......... do   // Condition d'arrêt de la méthode
    c = .................. // Calcul du terme de la suite c
    if f(c) > ....... then
        ...... =  c
    else
        ...... = c
    end
end
disp(b)
```

## Exercice 4

1. **Préliminaires**
On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad R_1(x) = x \qquad R_2(x) = x^2 - 2$$

et pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2,

$$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$$

   (a) Déterminer les polynômes $R_3$ et $R_4$.

   (b) Quels sont les degrés de $R_1$, $R_2$, et $R_3$ ? Quels sont leurs coefficients dominants ?

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$. Calculer $R_1(y)$, $R_2(y)$ et $R_3(y)$.

   (d) Montrer par récurrence double que, pour tout entier $k > 0$, $R_k$ est un polynôme de degré $k$ vérifiant pour tout réel $x$ non nul, l'égalité

$$R_k(x + \frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

2. **Un exemple particulier**
On pose $Q$ le polynôme défini par $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$.

   (a) On veut écrire $Q$ en utilisant le symbole $\sum$ : $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$. Que vaut alors $n$ ? Que valent les $a_k$ ?

   (b) Vérifier que pour tout $k \in [|0, 6|]$, on ait $a_k = a_{6-k}$.

   (c) Vérifier que 0 n'est pas racine de $Q$.

   (d) Vérifier que $Q$ peut s'écrire sous la forme $Q(x) = a_3x^3 + \displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k(x^k + x^{6-k})$. (Expliciter les $a_k$ et écrire cette somme en extension)

   (e) Calculer alors $\dfrac{Q(x)}{x^3}$.

   (f) Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^3} = 2 + R_3(y) + R_2(y) - 9R_1(y)$. (On rappelle que $y = x + \dfrac{1}{x}$ et que les $R_k(y)$ ont été calculés dans la partie 1).

(g) On pose $\tilde{Q}(y) = 2 + R_3(y) + R_2(y) - 9R_1(y)$. Montrer que

$$\tilde{Q}(y) = (y^3 - 3y) + (y^2 - 2) - 9y + 2$$

(h) Résoudre $\tilde{Q}(y) = 0$.

(i) En déduire alors que résoudre $Q(x) = 0$ est équivalent à résoudre pour tout réel $x$ non nul, $x + \frac{1}{x} = 3$ et $x + \frac{1}{x} = 4$.

(j) Conclure sur les racines de $Q$.