Durée : 2 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°2

MATHÉMATIQUES

Mercredi 27 Novembre 2019 - De 8h à 10h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Dénombrement

Une grande enveloppe contient les 12 figures d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

1. On tire simultanément et au hasard 5 cartes de l'enveloppe.
   (a) Combien de tirages ne contiennent aucun roi ?
   (b) Combien de tirages contiennent au moins un roi ?
   (c) Combien de tirages contiennent exactement deux rois ?
   (d) Combien de tirages contiennent quatre figures identiques (c'est-à-dire un carré) ?
2. Si l'on tire successivement et sans remise 5 cartes de cet enveloppe, combien de tirages contiennent au moins un roi ?

Exercice 2 - Suite et somme

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} + n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
3. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de $n \geq 0$.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \geq 0$.
4. (a) Donner l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Donner l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 - Démonstration par récurrence

On donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Calculer R_1, R_2 et R_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 6n^2 + 9n + 4 = (n+1)(n^2 + 5n + 4)$
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 4 - Étude de produit

Soit n un entier strictement positif.

1. On considère le produit :

$$P_n = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\dots(1+\frac{1}{n}) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$$

   (a) Montrer que P_n s'exprime très simplement en fonction de n.

   (b) En déduire la valeur de

$$Q_n = \ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k}).$$

2. Soit le produit

$$R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \cdots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

   (a) Montrer que R_n s'exprime très simplement en fonction de n.

   (b) En déduire la valeur de

$$S_n = \ln(1-\frac{1}{2}) + \ln(1-\frac{1}{3}) + \cdots + \ln(1-\frac{1}{n}) = \sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k})$$

3. En utilisant les résultats précédents, calculer :

$$T_n = \ln(1-\frac{1}{2^2}) + \ln(1-\frac{1}{3^2}) + \cdots + \ln(1-\frac{1}{n^2}) = \sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k^2})$$

4. En déduire l'expression de : $W_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5 - Somme et coefficients binomiaux

Soit k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$.

1. Soit $p \in [\![0,k]\!]$. Montrer que :

$$\binom{n}{n-p}\binom{n-p}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

2. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{n-p}\binom{n-p}{n-k}(-1)^{p+1}3^{k-p}.$$