Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°1

MATHÉMATIQUES

Samedi 12 Octobre 2019 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Formulaire

Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses (on ne demande pas de justifier la réponse)
Chaque bonne réponse apporte 1 point, chaque réponse fausse -1 point et aucune réponse 0 point

$a)$ $e^{a\times b} = e^a \times e^b$	$b)$ $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$	$c)$ $b\exp(a) = \exp(a^b)$
$d)$ $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	$e)$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$f)$ $\ln x$ existe ssi $x \geqslant 0$
$g)$ $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$	$h)$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$i)$ $\frac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0$
$j)$ $\frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{bd} \geqslant 0$	$k)$ $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x(x+1)}$	$l)$ $e^a + e^b = e^{a+b}$

Exercice 2 - Équations et inéquations

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-2x+5} = x-3$
2. $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+3}$
3. $e^x \geq x+1$
4. $|2x+1| + |x-2| = 4.$

Exercice 3 - Démonstration par récurrence

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n \geq 1+3n$.
2. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2}\ln(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq e$.

Exercice 4 - Étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2 - x - 1)e^x + e$$

On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. Étudiez le signe du trinôme $x^2 + x - 2$.
3. Déterminez a, b et c tel que $f(x) = x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)e^x + e$.
4. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Déterminer le tableau de variations de f.
6. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

Exercice 5 - Scilab

Les 3 questions sont indépendantes et par ordre de difficulté croissante.

1. On considère le programme

```
a = input('Entrez un réel')
b = a^2
a = b - 2*a
a = a +1
disp(a)
```

(a) Que fait le programme ci dessus ?

(b) Qu'affiche ce programme si l'utilisateur entre la valeur 2 ?

(c) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle l'ordinateur renvoie la valeur 0 ?

2. Au 13 Septembre 2019, le taux de change entre l'euro et les dollars américains, les livres sterling ou les roupies indiennes sont les suivants
— 1 EUR = 1,1075 USD
— 1 EUR = 0,8889 GBP
— 1 EUR = 78,6358 INR
Recopiez et complétez le programme suivant afin que lorsqu'un utilisateur entre une somme en euro et la monnaie dans laquelle il veut le change, il obtienne l'argent changé.

```
eur = input("Entrez la somme en euros")
change = input ("Entrez 1 si vous souhaitez obtenir le change en dollar. Entrez 2
si vous souhaitez obtenir le change en livres. Enfin, entrez 3 si vous souhaitez
obtenir le change en roupies."

USD = ...........
GBP = ...........
INR = ...........

if change == ......... then
    print("Avec " + str(....) + " euros, vous obtenez " + str(USD) + " dollars")
elseif change == ......... then
    print("Avec " + str(....) + " euros, vous obtenez " + str(GBP) + " livres")
else
    print("Avec " + str(....) + " euros, vous obtenez " + str(INR) + " roupies")
end
```

3. On cherche à résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer les valeurs de a, b et c et qui affiche
— les 2 solutions si le discriminant est positif,
— l'unique solution si le discriminant est nul,
— Il n'y a pas de solution si le discriminant est négatif.

Exercice 6 - Fonctions et suites

Partie 1

On considère la fonction $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est paire.

3. Tracer le tableau de variations de f.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \ln(1 + e^{-2x})$.
5. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x$.
6. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$.
7. Résoudre l'inéquation $f(x) < x + 1$.
8. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de f, $y = x$ et $y = x + 1$.

Partie 2

Etude de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln(e^{u_n} + e^{-u_n}) \end{cases}$

1. Justifier que la suite est bien définie et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. Déduire de la partie A que la suite u est croissante.
3. A l'aide de la partie A montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n + 1$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < n + 1$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(n + 1)$.

Exercice 7 - Probabilités et suites

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.
Initialement, l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne U_2 contient deux boules noires.
On considère l'épreuve $\mathcal{E}$ suivante :

— on lance la pièce
— si l'on obtient pile, on tire une boule de U_1, sinon on tire une boule de U_2
— si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour n entier naturel non nul, on désigne par A_n l'évènement

$\boxed{A_n : \text{" la boule blanche se trouve dans l'urne } U_1 \textbf{ à l'issue} \text{ de la } n^{ième} \text{ répétition de l'épreuve } \mathcal{E} \text{ "}}$

et par B_n l'évènement

$\boxed{B_n : \text{" la boule blanche se trouve dans l'urne } U_2 \textbf{ à l'issue} \text{ de la } n^{ième} \text{ répétition de l'épreuve } \mathcal{E} \text{ "}}$

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) La notation PiB_1 signifiant : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de U_1" (on l'a donc remise dans U_2), calculer la probabilité de l'événement $\{PiB_1\}$.
   (b) En utilisant la même notation, décrire les résultats possibles de l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (c) Calculer la probabilité des évènements A_1 et B_1
2. On répète maintenant l'épreuve $\mathcal{E}$.
   (a) Vérifier que : $\forall n \geqslant 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{5}{6}$ et $P_{A_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{6}$
   (b) Calculer également $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(B_{n+1})$
   (c) On notera $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$. En déduire a_{n+1} puis b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (d) Que vaut la somme $a_n + b_n$? En déduire que $\forall n \geqslant 0$, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{6} \\ b_{n+1} = \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{6} \end{cases}$
   (e) Déterminer, en fonction de n, les expressions de a_n et b_n.