
Durée : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°0

MATHÉMATIQUES

Mercredi 4 Septembre 2019 - De 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 (Calcul littéral)

- Développer et réduire l'expression $A = 2x^2 - (x + 2)(3x - 1)$.
- Factoriser l'expression $B = (2x + 3)^2 - 2(4x + 1)(2x + 3) + (4x + 1)^2$.

Exercice 2 (Fractions)

Écrire sous la forme la plus simple possible les fractions suivantes.

- $C = \frac{(2x^2 - x)(6 - 3x)}{3x(2 - x)}$.
- $D = -\frac{2x + 4}{2x} \times \frac{x^2}{2 + x}$.
- $E = \frac{50}{49} \times \frac{49}{48} \times \dots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1}$

Exercice 3 (Somme de fractions)

- Trouver le plus petit dénominateur commun entre $4(x + 2)(x^2 + 1)$ et $2(x^2 + 1)(x - 1)$.
- Écrire la fraction $\frac{2x + 3}{x}$ sous la forme $a + \frac{b}{c}$ où $b < c$.
- On donne $A = \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{1 + t^2}$ et $B = (1 + t^2)(1 + t)$. Écrire AB sous la forme la plus simple possible.

Exercice 4 (Racines carrées et $|\cdot|$)

- Simplifier au maximum l'expression $F = (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3)$.
- Exprimer sans valeur absolue la quantité $G = |-14|$.
- Exprimer sous forme d'une fraction irréductible l'expression $H = \frac{x}{\sqrt{x} - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} + 4}$.

Exercice 5 (Puissances)

Écrire les expressions suivantes sous la forme x^a .

- $I = \frac{x^3 \times x^{-2}}{x^5}$.
- $J = \sqrt{x} \times \frac{x^2}{(-x)^4 x^{-1}}$.

Exercice 6 (Équations)

Résoudre les équations suivantes par la méthode de votre choix.

- $(2x + 1)^2 - 25 = 0$.
- $(\ln(x) - 1)(2 - 5 \ln(x)) = 0$.

Exercice 7 (Logarithme et exponentielle)

Simplifier les expressions suivantes

- $K = \ln\left(\frac{\sqrt{8} + 2}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{8} - 2}{2}\right)$.
- $L = \ln(\sqrt{e^3})$

Exercice 8 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes par la méthode de votre choix.

- $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3} \leq -\frac{4}{15}$.
- $2x^2 - 4x \geq 0$.
- $\frac{1}{x - 5} < \frac{1}{2x + 1}$.

Exercice 9 (Fonctions)**Partie A**

On considère la fonction f définie sur $[1; 11]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 15 \ln(x)$. On donne les résultats suivants $-\frac{5}{2} + 15 \ln(5) \approx 21,6$ et $-\frac{77}{2} + 15 \ln(11) \approx -2,5$.

1. Déterminer la dérivée de la fonction f et la mettre sous la forme $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1, 11]$. On donnera les valeurs approchées des éléments du tableau.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 11]$. On admettra que $\alpha \approx 10,66$
 (b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1, 11]$.
4. (a) On considère la fonction F définie sur $[1; 10]$ par $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x \ln(x)$. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .
 (b) Calculer $\int_1^{10} f(x)dx$ (On donnera le résultat exact).
 (c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$ (On donnera le résultat exact).

Partie B

Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1100 chaises. Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros. On précise qu'un bénéfice peut être positif ou négatif (ce qui correspond dans le deuxième cas à une perte).

1. Quelle quantité de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif?
2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal?

Exercice 10 (Probabilités)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif. L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif. Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif. On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :

S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.

T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

Les résultats seront données de manière exacte.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
3. Déterminer la probabilité $P(T)$ de l'évènement T .
4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif. Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10 %?

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés. Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.
- Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
 - Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif.

Exercice 11 (Suites)

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 10 % chaque année. Au 1^{er} janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes. À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1^{er} janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n , le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année 2004 + n . On a ainsi $u_0 = 25000$.

- Calculer l'effectif de cette population de singes :
 - au 1^{er} janvier 2005,
 - au 1^{er} janvier 2006.
- Déterminer une formule pour u_n , n étant un entier naturel
- Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1^{er} janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous.

```

L1 : Variables          u un réel, n un entier
L2 : Initialisation    u prend la valeur .....
L3 :                   n prend la valeur .....
L4 : Traitement        Tant que ..... faire
L5 :                   u prend la valeur .....
L6 :                   n prend la valeur .....
L7 :                   Fin Tant que
L8 : Sortie            Afficher n
  
```

Partie B

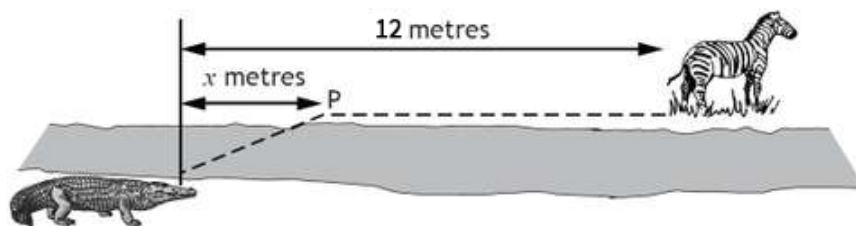
Au 1^{er} janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances. On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n , le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1^{er} janvier de l'année 2014 + n . On a ainsi $v_0 = 5000$.

- Calculez v_1 .
 - Déterminer une formule liant v_{n+1} à v_n pour tout entier naturel n .
 - Résoudre l'équation $x = \frac{3}{4}x + 400$. On notera x_0 sa solution.
 - On pose alors la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_n = v_n - x_0$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la valeur de w_0 .
 - Pour tout entier n , exprimer w_n en fonction de n .

- (f) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0,75^n$.
- (g) Calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter ce résultat.

Exercice 12 ()

Un crocodile a repéré une proie située à 12 mètres de lui sur la berge opposée d'une rivière. Le crocodile se déplace à une vitesse différente sur terre et dans l'eau. Le temps que met le crocodile à atteindre le zèbre peut être réduit s'il traverse la rivière en visant un certain point P , placé à x mètres du point de départ sur l'autre rive (voir schéma).



Le temps T nécessaire pour faire le trajet est donné par l'équation indiquée ci-dessous (en dixièmes de seconde) :

$$T(x) = 2\sqrt{81 + x^2} + (12 - x).$$

1. Calculer en combien de temps le crocodile rejoindra le zèbre uniquement à la nage.
2. Calculer en combien de temps le crocodile rejoindra le zèbre s'il coupe la rivière au plus court.
3. Entre ces deux extrêmes, montrer qu'il existe une valeur de x qui minimise le temps nécessaire et que cette valeur est comprise dans l'intervalle $[5; 6]$.