

## A rendre pour le 2 Mars 2020

**Exercice 1**

Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $x \leq e^x - 1 \leq ex$ .

**Exercice 2**

On considère pour  $p \in \mathbb{N}^*$  les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_p(x) = 1 + \ln(x + p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$$

On note  $(\mathcal{C}_p)$  la courbe représentative de la fonction  $f_p$ .

**1. Etude de la fonction  $f_1$** 

- (a) Donner le domaine de définition de  $f_1$ .
- (b) Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f_1$ . On fera apparaître les limites aux bords du domaine de définition.
- (c) Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 1, de la fonction  $f_1$ .
- (d) En déduire une équation de la tangente à  $C_1$  au point d'abscisse 0.
- (e) Montrer que la fonction  $f_1$  est concave sur son domaine de définition.
- (f) En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par rapport à cette tangente.
- (g) Tracer dans un repère orthonormée la courbe  $\mathcal{C}_1$  ainsi que sa tangente en 0.

**2. Etude d'une suite  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$** 

- (a) Montrer que l'équation  $f_p(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha_p$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . (On ne cherchera pas à calculer  $\alpha_p$ ).
- (b) Déterminer le signe de  $h_p(\alpha_{p+1})$  et en déduire que la suite  $(\alpha_p)_{p \geq 1}$  est monotone.
- (c) Prouver que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$$

Quel est le comportement de la suite  $(\alpha_p)_{p \geq 1}$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$  ?

**3. Valeur approchée de  $\alpha_1$** 

On admet que le réel  $\alpha_1$  appartient à l'intervalle  $[1; 3]$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n \geq 1$ .
- (b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

- (c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- (d) Déterminer un entier naturel  $n_0$  de telle sorte que si  $n$  est supérieur ou égal à  $n_0$  alors  $|u_n - \alpha_1|$  est inférieur ou égal à  $10^{-4}$ .

(e) Écrire un programme en Scilab permettant d'obtenir les valeurs de  $n_0$  et de  $u_{n_0}$

### Exercice 3

On considère la fonction  $f : x \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$ . On définit la suite  $(u_n)$  par

$$u_0 \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution dans  $[0, 1]$  que l'on notera  $\alpha$ .
2. (a) Montrer que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ . (c'est à dire que  $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$  ou encore,  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ .  
(b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .
3. (a) Montrer que  $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$   
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$ .  
(c) Puis que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ .  
(d) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.