A réaliser en autonomie

Exercice 1 (Exercice 19 FExo 14)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ et déterminer f'.
3. Étudier les variations de f. Déterminer les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. On appelle point d'inflexion le point où la dérivée de f change de sens de variation. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
5. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en ce point. (Graphiquement, la courbe traverse sa tangente en un point d'inflexion).
6. Tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé, ainsi que sa tangente T.

Exercice 2 (Exercice 23 FExo 14)
On souhaite déterminer le nombre de solutions de (E) : $x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi que la valeur approchée d'une des racines.

1. Montrer que (E) admet 3 solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.
2. On veut obtenir une approximation de β. On introduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Justifier que $\beta \in [0, 1/2]$ et montrer que β est solution de l'équation $g(x) = x$.
   (b) Montrer que $[0, 1/2]$ est stable par g et que $\forall x \in [0, 1/2]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1/2]$.
   (d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leqslant \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{2}$.
   (e) Pour quelles valeurs de n a-t-on $|u_n - \beta| \leqslant 10^{-9}$?
   (f) Écrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de β à 10^{-9} près.

Exercice 3
Terrassé par la perte de son fidèle ami Osorno emporté par la déesse Mapuche, et chassé du Villarica par les flammes noires de sa récente éruption, notre jeune condor Puyehue décida de réaliser un voyage initiatique à travers les Andes. Celui-ci l'amena à rencontrer une jeune condor nommée Chiloé. Et aujourd'hui il songe à sa descendance. Il faut savoir que le condor se reproduit de la manière suivante, il a 2 descendants avec probabilité $p \in]0, 1[$, et 0 descendant avec probabilité $1 - p$. On note X_n le nombre de descendants de Puyehue à la $n - ieme$ génération. On s'intéresse à $P(X_n = 0)$, c'est à dire à la probabilité que la lignée de Puyehue soit éteinte à la $n - ieme$ génération.

1. Soit $f(x) = px^2 + 1 - p$ une fonction définie sur $[0, 1]$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   (a) Tracer le tableau de variations complet de f.
   (b) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
   (c) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

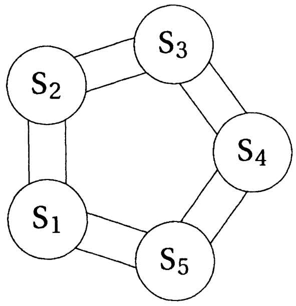
   (d) En déduire que $(u_n)_n$ converge. On note ℓ sa limite.
   (e) Montrer que si $p \leq 1/2$, $\ell = 1$.
   (f) Montrer que si $p > 1/2$, $\ell = \frac{1}{p} - 1$ (on pourra au préalable montrer que si $p > 1/2, u_n \leq \frac{1}{p} - 1, \forall n \geq 0$).
2. (a) On remarque que $X_0 = 1$. Déterminer la loi de X_1 et X_2.
   (b) Montrer que $(X_1 = 0, X_1 = 2)$ est un système complet d'événements.
   (c) Justifier que $P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)^2$.
   (d) Montrer en utilisant la FPT que

$$P(X_{n+1} = 0) = 1 - p + pP(X_n = 0)^2.$$

   (e) En déduire alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$. Interpréter.

Exercice 4

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.
Ils arrivent au rendez-vous à I'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes : .

— à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;

— les déplacements des deux personnes se font simultanément ;

— tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

A. Modélisatlon du problème
Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

— A_n : $\ll$ les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement$\gg$

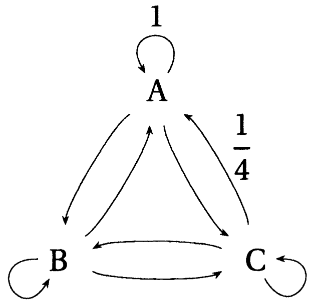
— B_n : $\ll$ les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement$\gg$

— C_n : $\ll$ les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement$\gg$

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n, C_n.forment un système complet d'événements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P\left(A_{n+1} | C_n\right) = \frac{1}{4}$.
   Indication : Cette notation signifie $P(A_{n+1})$ sachant C_n
   (b) Justifier $P\left(A_{n+1} | A_n\right) = 1$

(c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-dessous



4. Etablir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$

5. (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n

   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   on fera intervenir les nombres $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right)$.

6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β. (on pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$).

   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?