A rendre pour le 13 février 2020

Exercice I - Obligatoire pour les groupes 9 à 11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un nombre n et affichant u_n
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 2$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
5. Écrire un script Scilab permettant de déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 2| \leq 10^{-6}$.

Exercice II - Obligatoire pour les groupes 1 à 8

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Écrire un script Scilab permettant d'afficher le $n$ème terme de la suite u_n, n étant donné par l'utilisateur.
2. Établir pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
4. (a) Justifier pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leq x$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.
   (c) En déduire pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité $u_n \leq (\ln 2)^n$.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (e) On considère le programme *Scilab* suivant :

```
n=0 ; u =1
while u >= 0.0001
u = log(1+u^2)
n = n+1
end
disp(n)
```

   On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6. Quelle est la signification de ce résultat ?

   (f) Établir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$.

Exercice III - Obligatoire pour les groupes 6 à 11

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n(2-u_n),$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \to x(2-x)$.
2. (a) Montrer par récurrence que , pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) En déduire que la suite est convergente. Calculer sa limite.
3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$v_n = 1 - u_n$$
   (a) Exprimer pour tout entier n, v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) En déduire (par récurrence), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = (1-a)^{2^n}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n). Retrouver la limite de la suite (u_n).
4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps $t = 0$), la machine à café à une probabilité a d'être cassé ($0 < a < 1$). On notera A_n l'événement "la machine est cassé au temps $t = n$" et $p_n = p(A_n)$. Si la machine est cassé au temps $t = n$ elle reste cassé au temps $t = n+1$. Si la machine est en état de marche au temps $t = n$, elle a la probabilité p_n d'être cassé au temps $t = n+1$.
   (a) Calculez p_1
   (b) Écriver p_{n+1} en fonction de p_n.
   (c) En déduire p_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que pensez vous de ce résultat ?

Exercice IV - Obligatoire pour le groupe 1 à 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On la note x_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puis que $\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{2}{n}$.
   Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$?
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ (on utilisera le fait que pour tout $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$).
5. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout $n \geq 3$ et $x \in [0, 1]$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.

Exercice V - Obligatoire pour le groupe 1

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ où pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{et } v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

sont adjacentes. On admet que ces deux suites convergent vers e. Comment obtenir une approximation de e à 10^{-3} près à l'aide de Scilab ?