A rendre pour le 29 Janvier 2020

Exercice I - Obligatoire pour les groupes 5 à 11

On donne les approximations suivantes qui vous serviront au cours de l'exercice :

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25 \qquad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$$

$$\frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86$$

Préliminaire : Polynôme et étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$.
2. Factoriser P.
3. En calculant, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{2P(e^x)}{e^x}$ de deux manières différentes et en utilisant ce qui précède, justifier qu'on a l'égalité :

$$2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = \frac{2(e^x - 1)(e^x - 2)(e^x - 3)}{e^x}$$

4. Déduire des questions précédentes le signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ en dressant le tableau de signe.

Étude d'une fonction

On pose $v : x \to e^{2x} - 12e^x + 22x + 12e^{-x}$ et $h : x \to \dfrac{1}{v(x)}$.

1. Étude de v.
   (a) Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant les calculs.
   (b) Justifier proprement les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction v.
   (c) Dresser le tableau de variation de la fonction v.
   (d) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) > 0$.
2. Quel est l'ensemble de définition de h ?
3. Dresser le tableau de variation de h.

Exercice II - Obligatoire pour les groupes 2 à 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Que doit-on taper dans Scilab pour avoir la représentation graphique de f sur $]2, 10]$?

4. Montrer que pour tout réel $x > 2$, $f(x) > 1$.
5. On note g la restriction de f à $]2;\, +\infty[$:

$$g \; : \; \begin{array}{ccc}]2,+\infty[& \longrightarrow &]1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2-4} \end{array}$$

Montrer que g est bijective et donner son application réciproque.

Exercice III - Obligatoire pour les groupes 1 à 5

On définit pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par : $P_0(X) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) + (2 - 3(n+1)X^2)P_n(X) \tag{1}$$

1. Étude des polynomes
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 2^{n+1}$
   (b) Calculer $P_1(X)$ en utilisant la relation (1) et déterminer ses racines.
   (c) Montrer que $P_2(X) = 24X^4 - 36X^2 + 8$ et déterminer ses racines.
   (d) Montrer par récurrence que le polynôme P_n est de degré $2n$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$
   (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^6}e^{-1/x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^9}e^{-1/x^2}$$
   (b) En déduire les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. Tracer son tableau de variation.
   (c) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est convexe ou concave.
   On rappelle qu'une fonction 2 fois dérivables est convexe (resp concave) si et seulement si $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$)
   (d) Conjecturer une formule pour la dérivée n-ème de f notée $f^{(n)}(x)$.
   (e) Démontrer cette formule par récurrence.
3. En scilab, un polynôme peut être modélisé par une matrice ligne ne comportant que les coefficients du polynôme. Ainsi la matrice $[2, 3, 5]$ correspondra au polynôme $P(X) = 2 + 3X + 5X^2$.
   (a) A quel polynôme correspondra la matrice $[1, 0, 2, 4]$?
   (b) Écrire $P_1(X)$ et $P_2(X)$ des questions $1(b)$ et $1(c)$ en Scilab.
   (c) Si un polynôme est de degré n, quelle sera la taille de sa matrice associée en Scilab ?
   (d) Compléter la fonction suivante qui pour un polynôme quelconque, permet d'obtenir le polynôme dérivée :

```
function Q = derive(P)
    n = size(P) \\permet d'obtenir la taille de la matrice P
    if n == 1
        Q = [.....]
    else
        Q = zeros(1,......)
        for k = 1 : ......
            Q(k) = ............
        end
    end
endfunction
```

Exercice IV - Obligatoire pour le groupe 1

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation $e^x = x^n$que l'on note (E_n). A cet effet on introduit la fonction $f_n$définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

1. Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)
   (a) Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2
   (b) Etudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2). On rapelle que $2 < e < 3$
   (c) Écrire un script scilab permettant de représenter les fonctions f_1 et f_2 sur $[0; 5]$ avec un pas $h = 0.01$.
2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)
   (a) Etudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3. On donne les valeurs approchées : $e^2 \simeq 7,4;\ e^3 \simeq 20,1;\ e^4 \simeq 54,6;\ e^5 \simeq 148,4$
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacunes d'elles par deux entiers consécutifs.
   (b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0,où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.
   — Montrer que si $u < y_0 \leq v$, alors pour tout entier naturel n, $u < y_n \leq v$.
   — Montrer que si $v \leq y_0$, alors pour tout entier naturel n, $v \leq y_n$.
   — Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$
   En déduire selon la position de y_0 par raport à v, le sens de variation de la suite (y_n) .
3. Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.
   (a) Etudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.
   (b) Déterminer pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci.
   (c) Montrer que $u_n = \exp(u_n/n)$. En déduire que la limite de (u_n) est 1.
   (d) Déterminer, pour $n \geq 4$ le signe de $f_{n-1}(v_n)$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (v_n),..
   (e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rapellera l'énnoncé) que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.
   Établir que $g(v_n/n) = \ln(n)$, montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que v tend vers $+\infty$,.