A rendre pour le 16 Décembre 2019

Exercice 1

L'exercice se propose d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x réel, $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Étude d'une fonction g intermédiaire.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geq 0, \qquad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
3. Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur $\mathbb{R}_+$.
4. En déduire les variations de la fonction g et montrer que : $\quad \forall t \geq 0,\ g(t) \leq 0$.

Étude de la fonction f.

5. Démontrer que l'on a , pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$
6. Déterminer les limite de f en $-\infty$ et $+\infty$
7. Étudier alors les variations de la fonction f et tracer son tableau de variation.
8. Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\dfrac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a,pour tout x de l'intervalle $[0,1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

Exercice 2 - Dénombrement

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : "les trois jetons sont alignés horizontalement " .

— V :" les trois jetons sont alignés verticalement " .

— D : " les trois jetons sont alignés en diagonale " .
— N : " les trois jetons ne sont pas alignés " .

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements $H, .V, .D$.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$\mathrm{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
   (a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{ème}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i .
   (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de ‚jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
   (b) Indiquer l'espérance et la variance de X.
   (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X.
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement "la fonction aléatoire est déréglée" et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$\mathrm{P}(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?