

A rendre pour le 4 Novembre 2019

## Exercice 1 - Calculs de Somme

Calculer les sommes suivantes et donner le résultat sous forme factorisée et simplifiée :

$$1. \sum_{k=0}^n k(k-2). \quad 2. \sum_{k=2}^n x^{2k+2}. \quad 3. \sum_{k=4}^{n+3} (k-3)^3 \quad 4. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k}$$

## Exercice 2 - Puissances de matrices

### I - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 2$  et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$$

ainsi que les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

### Résolution numérique

- Recopier et compléter le programme scilab suivant permettant de calculer le 100ème terme des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

```
//initialisation
a = .....
b = .....

// calculs
for k = 1: .....
    temp = .....
    .... = 3*a + b
    b    = .....
end

// conclusion
disp('Le 100ème terme de la suite a est" + string(.....))
disp('Le 100ème terme de la suite b est" + string(.....))
```

### Résolution en utilisant les suites

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- Déterminer  $a_n$  pour tout  $n$  entier.
- En déduire  $b_n$  pour tout  $n$  entier.

### Résolution en utilisant les matrices

5. Montrer que la matrice  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
6. Calculer  $D = P^{-1}AP$ .
7. En déduire  $D^n$  pour tout entier  $n$ .
8. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .
9. On note  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ . Déterminer une relation matricielle entre  $X_{n+1}$  et  $X_n$ .
10. Montrer par récurrence que  $X_n = A^n X_0$ .
11. En déduire  $a_n$  et  $b_n$  pour tout  $n$  entier.

### II - Cas d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on introduit les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est de calculer  $B^n$  pour tout entier  $n$ .

1. Calculer  $B \times (B - I_3)^2$ . Que peut-on en déduire sur l'inversibilité de la matrice  $B$ ?
2. Calculer  $C(C - I_3)(2I_3 - C)$ .
3. En déduire que  $C$  est inversible et déterminer  $C^{-1}$ .
4. Montrer que  $B = C^{-1} \times T \times C$ .
5. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. En déduire  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .