

A rendre pour le 9 Octobre 2019

## Exercice 1 - Démonstration par récurrence

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ . Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2}{2n + 1}$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + 2u_n}}{2}$ . Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $0 < u_n \leq 1$ .

## Exercice 2

1. Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x \ln(1 + x)$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
- (b) La fonction  $f$  admet-elle une parité? Si oui laquelle?
- (c) Calculer les limites de  $f$  au bord du domaine de définition.
- (d) Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .
- (e) En déduire son tableau de variations.
2. (a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .
- (b) Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq x$ .
3. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} u_0 \in ]0; e - 1[ \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln(u_n + 1) \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in ]0; e - 1[$ .
- (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
4. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} u_0 > e - 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln(u_n + 1) \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > e - 1$ .
- (b) Quelle est la monotonie de la suite  $(u_n)$ ?

## Exercice 3

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Deux sociétés sont utilisées : la société A et la société B : La probabilité pour que la société A livre le colis en retard est de 0,1 alors que la probabilité que la société B livre le colis en retard est de 0,2 : On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données.

### Situation 1

Pour des raisons tarifaires, l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A sinon.

1. Un jour donné, calculer la probabilité que le colis arrive en retard.
2. Un jour donné, le colis arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A ?

### Situation 2

Dans cette situation, il est décidé que le premier jour, l'entreprise utilise la société B. Puis si au jour  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), le colis arrive en retard, alors l'entreprise choisit la société A au jour  $n + 1$ , et sinon, elle choisit la société B. On introduit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'événement  $R_n$  : " le colis arrive en retard au jour  $n$ ", et on note  $p_n = P(R_n)$  :

1. Déterminer  $p_1$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = -0,1p_n + 0,2$
3. En déduire  $p_n$  en fonction de  $n$ .
4. Écrire un programme scilab qui calcule et affiche les termes de  $p_1$  à  $p_n$  où  $n$  est un entier naturel entré par l'utilisateur.

### Situation 3

Finalement, l'entreprise décide d'utiliser les sociétés en fonction de leurs précédentes réussites. Pour cela ils utilisent une urne contenant des boules rouges et vertes. Chaque jour, l'entreprise tire une boule. Si la boule tirée est rouge, l'entreprise utilise la société A. Sinon elle utilise l'entreprise B. Enfin,

- Au jour 1, on a 1 boule rouge et 1 boule verte.
- Si la société A est en retard, on rajoute une boule verte dans l'urne.
- Si la société B est en retard, on rajoute une boule rouge dans l'urne.

On notera les évènements

- $R_n$  : "Le colis arrive en retard au jour  $n$ ".
- $A_n$  : "On choisit la société A au jour  $n$ ".
- $B_n$  : "On choisit la société B au jour  $n$ ".

1. Que dire des évènements  $A_n$  et  $B_n$  ?
2. Calculer  $P(A_1)$  et  $P(B_1)$ .
3. Sachant qu'au premier jour, on a choisi la société A et que le colis a été livré en retard, quelle est la probabilité de choisir la société A au deuxième jour ?
4. Calculer la probabilité d'avoir choisi la société A au jour 1 et au jour 2.
5. Calculer  $P(A_2)$ . En déduire  $P(B_2)$ .
6. Expliquer ce que fait ce programme scilab en commentant chaque ligne.