

A rendre pour le 11 Mai

Exercice 1 - Obligatoire Groupe 7 à 11

Cet exercice devra être rédigé d'une façon particulière.

— *Tous les raisonnements devront être sous la forme :*

Je sais que ..(Hypothèses de l'exercice, questions précédentes ...)

Or j'ai appris que .. (Résultat de cours recopié ou nom du théorème s'il en a un)

Donc je conclus que ...(Conclusion)

Il faut noter les phrases "Je sais que, or j'ai appris que, donc je conclus que"

— *Toute ligne de calcul devra être justifiée en précisant la formule du cours utilisée pour passer d'une ligne à la suivante.*

Tout manquement aux consignes sera compté comme 0 pour la question.

1. (a) Étudier les variations de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^4 - 4x + 1$
On précisera les limites aux bornes.
- (b) En déduire que l'équation (E) : $x^4 - 4x + 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles α et β (en notant α la plus petite).
- (c) Justifier que $\alpha \in [0; 1[$ et $\beta > 1$.

2. On considère la fonction g définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{x^4 + 1}{4}$.

On définit alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = g(u_n)$.

- (a) Étudier les variations de g (on précisera les valeurs aux bornes).
- (b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.
- (c) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0; \alpha]$.
- (d) Étudier la monotonie de (u_n) .
- (e) En déduire que la suite converge et donner sa limite.
- (f) Écrire un programme en Scilab qui demande un entier n à l'utilisateur et qui renvoie la valeur de u_n .

Exercice 2 - Lois de probabilités - Groupes 10 et 11

Reprendre l'exercice 17 de la feuille d'Exo 19 en justifiant chaque ligne de calcul en précisant la formule de cours utilisée

1. Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Montrer que les séries suivantes convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1} = 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} npq^{n-1} = \frac{1}{p}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 pq^{n-1} = \frac{q+1}{p^2}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les séries suivantes convergent et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = 1, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda(\lambda + 1).$$

Exercice 3 - Groupe 3 à 11

1. Soit $T_n = \sum_{k=1}^n k^2$. Rappeler la valeur de T_n en fonction de n .
2. Montrer que, pour tout réel x positif ou nul on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
3. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour $n > 0$
4. En déduire la limite de la suite (v_n) définie par : $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ pour $n > 0$
5. Ecrire un script en Scilab qui calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n lorsque n est un entier naturel non nul entré au clavier par l'utilisateur.

Exercice 4 - Lois de probabilités - Groupes 1 à 9

Le but de cet exercice est de calculer des sommes liées à des lois de probabilités qui ne sont pas au programme d'ECE. Comme dans l'exercice 17 de la feuille d'exo 19, si l'on dispose de la valeur de $P(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, on cherchera à vérifier que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)$ et à calculer $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)$ et $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2P(X = n)$.

1. Loi logarithmique : La loi logarithmique est donnée pour un paramètre $p \in]0; 1[$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^k}{k}$$

- (a) On pose la fonction $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1}$. Rappeler l'autre formule pour $f_n(x)$.
- (b) En intégrant les deux formules entre 0 et p , montrer que

$$\int_0^p f_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k} = -\ln(1-p) - \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx$$

- (c) Montrer que

$$0 \leq \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{(n+1)(1-p)}$$

- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^p \frac{x^n}{1-x} dx = 0$.
- (e) Montrer en justifiant soigneusement que $\sum_{k \geq 1} P(X = k)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

- (f) Montrer que $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$ et $\sum_{k \geq 1} k^2P(X = k)$ convergent et déterminer leurs sommes.

2. Loi Zêta de Riemann. En probabilité, on dit qu'une variable aléatoire suit une loi zêta de paramètre s si

$$P(X = k) = \frac{k^{-s}}{\zeta(s)}$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

- (a) D'après le cours, pour quelles valeurs de s la fonction ζ est-elle définie ?
 (b) Montrer que pour ces valeurs de s , on a bien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$$

- (c) Déterminer à quelles conditions $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$ et $\sum_{k \geq 1} k^2P(X = k)$ convergent et montrer que dans ces cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(X = k) = \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}$$

Exercice 5 - Issue de EDHEC - Groupes 1 à 6

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

- Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .
- Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
 - Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
 - Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
 - En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
- En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
- On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
 - Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 - Montrer que, pour tout n de \mathbf{N} , on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 - Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
 - Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
 - Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
 Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice - Issue de ESSEC - Groupe 1 et 2

Dans cette première partie on considère un ensemble discret \mathcal{K} dont on suppose qu'il est soit fini soit égal à l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} . \mathcal{A} désigne l'ensemble de toutes les parties de \mathcal{K} et pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note \bar{A} le complémentaire de A dans \mathcal{K} .

Soient P et Q deux probabilités sur \mathcal{K} . Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on pose $p_k = P(\{k\})$ et $q_k = Q(\{k\})$. On rappelle que pour tout $k \in \mathcal{K}$, $p_k \geq 0$, avec $\sum_{k \in \mathcal{K}} p_k = 1$. De plus toute probabilité P est entièrement déterminée par la donnée de $(p_k)_{k \in \mathcal{K}}$ puisque pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum_{k \in A} p_k$

Lorsque \mathcal{K} est fini on définit la distance en variation entre les probabilités P et Q par

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k| \quad ((i))$$

1. Lorsque $\mathcal{K} = \{0; 1\}$ exprimer $D(P, Q)$ en fonction de p_1 et q_1 .
2. Lorsque $\mathcal{K} = \mathbb{N}$, vérifier que la série de terme général $(|p_k - q_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente. On étend donc la définition de la distance en variation donnée par (i) au cas où $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.
3. Vérifier que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $|P(A) - Q(A)| \in [0, 1]$.

$$4. \text{ Montrer que pour tout } A \in \mathcal{A}, 2|P(A) - Q(A)| = \left| \sum_{k \in A} (p_k - q_k) \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} (p_k - q_k) \right|$$

5. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P; Q) \quad ((ii))$$

6. Montrer que la partie $A = \{k \mid k \in \mathcal{K} \text{ et } q_k \geq p_k\}$ réalise l'égalité dans (ii), c'est à dire que

$$|P(A) - Q(A)| = D(P; Q)$$

7. Démontrer la formule $D(P; Q) = 1 - \sum (p_k \wedge q_k)$
8. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que X soit de loi P et Y soit de loi Q . Autrement dit, pour tout $k \in \mathcal{K}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = p_k \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y = k) = q_k$$

Montrer que $D(P; Q) \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$