A rendre pour le 12 Avril 2020

Exercice 1 - Espaces vectoriels

1. On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) | -x+y+2z=0 \text{ et } y-3z=0 \right\}$
   (a) Expliquez ce que fait le programme scilab suivant

```
function y = isF(X) \\X doit être un vecteur de taille 3
     y = 1
     if -X(1) + X(2) + 2*X(3) <> 0 then
         y = 0
     end
     if X(2) - 3*X(3) <> 0 then
         y = 0
     end
endfunction
```

   (b) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (c) Écrire F sous la forme $vect(u)$ avec u un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
2. Dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Écrire le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de u, v et w.

Exercice 2

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $]-1;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]-1;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire que la fonction est convexe sur $]-1;+\infty[$.
   (b) Étudier les variations de f', puis celles de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaitre les limites.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.
   (e) Donnez la position relative de la courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   (f) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et la droite d'équation $y = x$.
2. On suppose dans cette question : $u_0 \in]0; e-1[$.
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n \leq e-1$.
   (b) En déduire que u_n est convergente.
   (c) Déterminer la limite de (u_n)

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par $f(0)=0$ et, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,1[$.
2. Déterminer la convexité de f sur $]0,1[$.
3. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f ainsi que la tangente calculée précédemment. On prendra $e^2 \approx 7,3$.