

A rendre pour le 25 Mars 2020

Exercice 1 - Obligatoire pour les groupes 8 à 11

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n existe.
2. Écrire un programme Scilab qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N .
3. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
4. Établir que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
5. Établir que :

$$\forall x \geq e - 1, \quad f(x) \leq x \quad \text{et} \quad (x + 1) \ln(x + 1) \geq (x + 1)$$

En déduire que :

$$\forall x \geq e - 1, \quad f'(x) \geq 0$$

6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - 1 \leq u_n$$

7. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L .

Exercice 2 - Obligatoire pour les groupes 7 à 11

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.
4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$.
5. En déduire une fonction Scilab qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n , le n -ième terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

7. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

Exercice 3 - Obligatoire pour les groupes 1 à 6

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \rightarrow e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

9. En déduire la limite de la suite $(n I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(n I_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c .

Exercice 4 - Obligatoire pour les groupes 3 à 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit $f(x)$.

1. (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et donner, pour tout $x > 0$, l'expression de $f'(x)$.
(b) Déterminer $f(1)$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) \geq e \ln(x)$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. On admet que pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) \leq e^x \ln(x)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n tel que $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$.
(b) En utilisant les variations de f , montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 5 - Obligatoire pour les groupes 1 à 7

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

- Déterminer l'ensemble de définition de F , et préciser son signe.
 - Étudier la parité de F . (Penser à un changement de variable)
 - Justifier que F est C^1 sur \mathbb{R} , puis donner son sens de variation.
- En justifiant que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}$, montrer que $\forall x \geq 0, F(x) \leq 2$.
 - En déduire que la fonction F admet une limite L en $+\infty$ et que $L \leq 2$.
- Montrer que $\forall x \geq 0, F(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$ et en déduire que $L \geq 1$.
- Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution sur $[0, +\infty[$.
- On pose $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - Justifier que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer G' .
 - En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = 2F(1)$.
 - En faisant tendre x vers $+\infty$ dans G , montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 6 - Obligatoire pour les groupes 1 et 2

Soit x un réel strictement positif.

On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots$$

On se propose d'étudier la limite $S(x)$ de $S_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Pour tout entier naturel n on pose :

$$f_p(t) = \frac{t^{x+p}}{1+t} \text{ si } 0 < t \leq 1, f_p(0) = 0$$

et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t) dt$.

- Montrer que pour tout entier naturel p , l'intégrale $I_p(x)$ existe.
- Montrer que pour tout t de $[0, 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

- Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = S_n(x) + R_n(x) \text{ où } R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt$$

- Démontrer que pour tout entier n :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$$

5. Conclure que l'on a :

$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

6. Etude du cas $x = 1/2$.

En utilisant le changement de variable $u = t^{1/2}$ calculer $S(1/2)$. On admettra que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

7. En déduire que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$