A rendre pour le 25 Septembre 2019

Exercice 1

Résoudre les équations et les inéquations suivantes.

1. $\ln(x-3) + \ln(x+1) = 3\ln 2$
2. $|3x+1| + |2x-4| = 5$
3. $x^2 - 3x \leq 4$
4. $1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \ln(x)$

Exercice 2

Soit g la fonction définie par $g : x \to \ln(1+x^2)$.

1. Déterminer son ensemble de définition puis son signe.
2. Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer la parité de la fonction g.
4. Dresser alors son tableau de variations.
5. On fixe $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue x, $g(x) = y$ (on distinguera différents cas suivant la valeur de y).
6. En étudiant une fonction annexe, déterminer la position relative de la courbe représentative de g et de la droite d'équation $y = x$.
7. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g en faisant figurer la droite $y = x$.

Exercice 3

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. (a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
   (b) Donner les valeurs de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
   (b) Construire le tableau de variation de f.
   (c) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On note cette droite T.
3. (a) Calculer la dérivée seconde de f et donnez le signe de $f''(x)$.
   (b) Construire sur un même schéma $\mathscr{C}_f$ et T.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question à l'équation (E_n) d'inconnue x : $f(x) = n$.

(a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (*on ne cherchera pas ici à calculer* u_n). Préciser la valeur de u_0.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.

(c) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de (E_n) pour n entier naturel.