

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D ADMISSION SIGMA 2019

Concepteur : EDHEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 6 Juin 2019, de 13h30 à 17h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les 3 questions sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
 - (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel.
 - (b) Déterminer 2 vecteurs u et v tel que $E = \text{vect}(u, v)$.
 - (c) Montrer que les vecteurs u et v forment une famille libre.

2. On considère l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x - y + z \\ 2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$ et on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que l'application f est un endomorphisme.
 - (b) Déterminer les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
 - (c) Déterminer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$.
 - (a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
 - (b) Écrire F sous la forme $\text{vect}(u, v)$ avec u et v deux vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(Indication : Résoudre le système $AX = 0$).

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : le i -ème tirage donne une boule blanche, on pose $\overline{B}_i = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X .
2. (a) Pour tout i de $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, justifier que $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - i}{n - i + 1}$.
 - (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
 - (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

- (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P\left([X = k] \cap [Y = 0]\right) = \frac{n - k}{n(n - 1)}$$

- (b) En déduire $P(Y = 0)$.

- (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

4. Simulation informatique.

On rappelle qu'en Scilab, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[a, b]]$.

- (a) Compléter le script Scilab suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X .

On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre $nB+1$, où nB désigne le nombre de boules blanches.

```

1. n=input('entrez une valeur pour n : ')
2. nB=n-1
3. X=1
4. u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
5. while u<nB+1
6.     nB=-----
7.     u=grand(1,1,'uin',1,-----)
8.     X=-----
9. end
10. disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
```

- (b) Compléter les lignes 4 et 8 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X , la valeur prise par Y .

```

1. n=input('entrez une valeur pour n : ')
2. nB=n-1
3. X=1
4. Y=-----
5. u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6. while u<nB+1
7.     nB=-----
8.     if u==1 then
9.         Y=-----
10.    end
11.    u=grand(1,1,'uin',1,-----)
12.    X=-----
13. end
14. disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro')
15. disp(Y,'la valeur de Y est')
```

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - (a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$, où σ est un réel strictement positif.
 - (b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.
 - (c) Montrer que, pour tout réel t , on a : $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.
 - (d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, puis donner la limite de la suite (u_n) .
4. Calculer $\int_0^1 (1 - t)^n dt$, puis montre que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?
5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n + 2)(u_n - u_{n+1})$$

- (b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n + 1)!}$$

6. Informatique.

On admet que, si \mathbf{t} est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de \mathbf{t} . Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```

1. n=input('entrez une valeur pour n : ')
2. x=1:n
3. m=2*n+1
4. y=1:m
5. v=-----
6. w=-----
7. u=-----*v^2/w
8. disp(u)

```

Problème

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \end{cases}$

(a) Calculer $\int_0^1 f(x) dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

- (b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X , définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, et admettant f comme densité.

2. Établir l'existence de l'espérance de X , puis donner sa valeur.
 3. Montrer que la fonction de répartition de X , notée F_X , est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4. (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
 (b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X .
 (c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0; 1] \end{cases}$$

- (d) Montrer que Y possède une espérance et la déterminer.
 5. On considère deux variables aléatoires U et V , elles aussi définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0; 1]$.
 On pose $I = \min(U; V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω , on a $I(\omega) = \min(U(\omega); V(\omega))$.
 On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, et on rappelle que, pour tout réel x , on a $P(I > x) = P((U > x) \cap (V > x))$.
 Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I .

- (a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x .
 (b) En déduire que I suit la même loi que Y .
 6. On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1; X_2; \dots; X_n$, $n \geq 2$, toutes définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose $I_n = \min(X_1; X_2; \dots; X_n)$.
 Déterminer la fonction de répartition de I_n .

7. Simulation informatique de la loi de Y .
 Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
function Y = simulation()
U = .....
V = .....
if U < V then
    Y = .....
else
    Y = .....
end
endfunction
```