

# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D ADMISSION SIGMA 2019

Concepteur : EMLYON / ECRICOME

---

## OPTION ÉCONOMIQUE

### MATHÉMATIQUES

Lundi 3 Juin, de 8h à 12h

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Exercice 1 - Inspiré EML 2003

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$  puis vérifier que  $A^3 = A^2 + 2A$ .
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ?
3. Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique  $(a_n, b_n)$  de nombres réels tels que

$$A^n = a_n A + b_n A^2$$

4. (a) Montrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

- (b) En déduire  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1.
- (c) Donner l'expression de  $A^n$  en fonction de  $A$ ,  $A^2$  et  $n$ , pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1.

## Exercice 2 - Inspiré ECRICOME 2008

On considère pour  $p \in \mathbb{N}^*$  les fonctions suivantes:

$$\begin{cases} f_p(x) = 1 + \ln(x + p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$$

On note  $(\mathcal{C}_p)$  la courbe représentative de la fonction  $f_p$ .

### 1. Etude de la fonction $f_1$

- (a) Donner le domaine de définition de  $f_1$ .
- (b) Déterminer le tableau de variation de la fonction  $f_1$ . On fera apparaître les limites aux bords du domaine de définition.
- (c) Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 1, de la fonction  $f_1$ .
- (d) En déduire une équation de la tangente à  $C_1$  au point d'abscisse 0.
- (e) Montrer que la fonction  $f_1$  est concave sur son domaine de définition.
- (f) En déduire la position de la courbe  $\mathcal{C}_1$  par rapport à cette tangente.
- (g) Tracer dans un repère orthonormé la courbe  $\mathcal{C}_1$  ainsi que sa tangente en 0.

### 2. Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$

- (a) Montrer que l'équation  $f_p(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha_p$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . (On ne cherchera pas à calculer  $\alpha_p$ ).
- (b) Déterminer le signe de  $h_p(\alpha_{p+1})$  et en déduire que la suite  $(\alpha_p)_{p \geq 1}$  est monotone.
- (c) Prouver que l'on a:

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$$

Quel est le comportement de la suite  $(\alpha_p)_{p \geq 1}$  lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ?

### 3. Valeur approchée de $\alpha_1$

On admet que le réel  $\alpha_1$  appartient à l'intervalle  $[1; 3]$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ :  $u_n \geq 1$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha_1|$$

- En déduire que pour tout entier naturel  $n$ :

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- Déterminer un entier naturel  $n_0$  de telle sorte que si  $n$  est supérieur ou égal à  $n_0$  alors  $|u_n - \alpha_1|$  est inférieur ou égal à  $10^{-4}$ .
- Écrire un programme en Scilab permettant d'obtenir les valeurs de  $n_0$  et de  $u_{n_0}$

## Exercice 3 - Inspiré ECRICOME 2009

### Liminaire.

Soient  $x$  un réel dans l'intervalle  $[0, 1[$ ,  $n$  un entier naturel non nul et  $S_n$  la fonction définie par:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

- Calculer la somme  $S_n(x)$ .
- Dériver l'égalité obtenue et montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

### Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée  $X$ , exprimée en minutes, qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à  $p = 0.8413$  et que l'espérance de  $X$  est de 5 minutes.

- Déterminer la valeur de  $\sigma$  en utilisant la table jointe en annexe.
- Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
- Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en annexe).

4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.
- (a) On désigne par  $Y$  la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.  
Déterminer la loi de  $Y$ , donner sans calcul, son espérance et sa variance.
- (b) On définit par  $Z$  la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang  $k$  du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours,  $Z$  prend la valeur 0.  
Déterminer en fonction de  $p$  la probabilité des événements  $[Z = 0]$ , puis  $[Z = k]$  pour  $1 \leq k \leq 10$ .  
Utiliser le liminaire pour calculer l'espérance de  $Z$  en fonction de  $p$ .
5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :
- Le premier jour, il prend le bus.
  - Si le jour  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour  $n + 1$  il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.
  - Si le jour  $n$  il prend le métro, le jour  $n + 1$  il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n =$  "Monsieur Thurman prend le bus le jour  $n$ "

- (a) Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2}$$

- (b) Soit  $\alpha$  le réel vérifiant :

$$\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2}$$

Déterminer  $\alpha$  en fonction de  $p$ , puis montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha$$

- (c) La suite  $(p_n)$  est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

## Partie 2.

1. Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée  $t$  suit une loi de Poisson  $Y_t$  de paramètre  $\lambda t$ ,  $\lambda$  étant une constante strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note  $T$  la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention  $P(T \leq t) = 0$  pour  $t < 0$ .
- (a) Pour tout entier naturel  $k$ , rappeler la valeur de la probabilité de l'événement  $[Yt = k]$ , ainsi que l'espérance et la variance de  $Y_t$ .

- (b) Que peut-on dire des événements  $[Y_t = 0]$  et  $[T > t]$  pour  $t > 0$ . En déduire la probabilité des événements  $[T > t]$  et  $[T \leq t]$  pour  $t > 0$ .
- (c) Expliciter la fonction de répartition  $F_T$  de  $T$ . Reconnaître la loi de  $T$  et donner son espérance et sa variance.

2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire  $U$  à densité dont une densité est donnée par :

$$g(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- (a) Vérifier que  $g$  est bien une densité de probabilité.
- (b) Montrer que  $U$  admet une espérance que l'on déterminera. Que représente cette espérance ?

## Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

par exemple  $\Phi(0,67) = 0,7486$

$x$	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0,0</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,1</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,2</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,3</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,4</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,5</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,6</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,7</b>	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,8</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,9</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1,0</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,1</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,2</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,3</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,4</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2,0</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817