

---

**Durée** : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

# DEVOIR SURVEILLE N°5

---

## MATHÉMATIQUES

Vendredi 17 Mai, de 8h à 12h

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

Pour rappel, les élèves suivants peuvent choisir entre l'exercice III (A) et l'exercice III (B). Les autres doivent prendre automatiquement l'exercice III (B).

Barbera Lisa	Birbes Eva	Boussidan Marine
Bremard Margot	Caseneuve Iphigénie	Hebail Syrine
Libessart Jules	Louaisil Clara	Luzietti Léo
Perelli Clara	Reponty Félix	Yahyai Selma

## Exercice I - ECRICOME ECT 2019

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la limite de  $g$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat.  
(b) Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $]0; +\infty[$  et dresser son tableau de variation.
3. On considère la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x - 1$ .  
(a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (2x - 1)$   
(b) Déterminer la position de la courbe par rapport à la droite  $(\Delta)$ .
4. Étudier la convexité de la courbe.
5. (a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .  
(b) Recopier et compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de **Scilab** afin qu'il affiche un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près lorsque  $a$  et  $b$  sont choisis tels que  $\alpha \in [a, b]$ .

```

fonction y=g(x)
    y = .....
endfonction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a .....
    m = .....
    if g(a)*g(m) <= 0 then
        .....
    else
        .....
    end
end
disp(.....)

```

6. Le programme **Scilab** ci-dessus affiche 0.88 comme résultat. Dans un repère orthonormé, placer le réel  $\alpha$  sur l'axe des abscisses, tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(\Delta)$ .
7. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^2 \left( (2x - 1) - g(x) \right) dx$$

- (b) Interpréter graphiquement le résultat.
8. (a) On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$u_n = (2n - 1) - g(n).$$

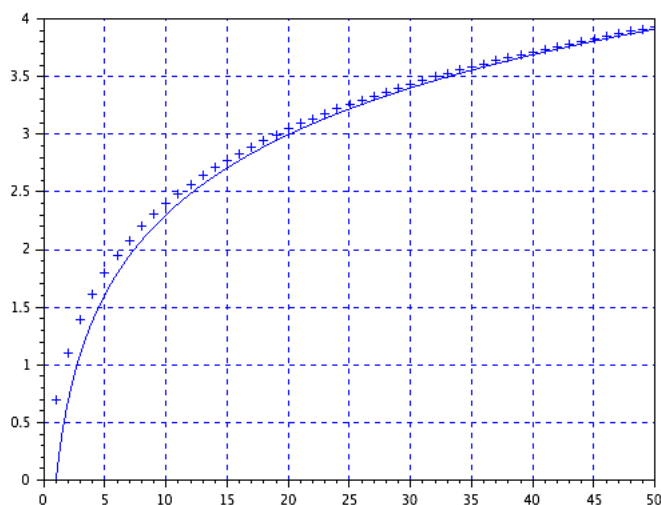
Le script **Scilab** ci-dessous construit un vecteur ligne  $u$  contenant les 50 premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

```

u = zeros(1,50)
for n =1:50
    u(n) = (2*n-1)-g(n)
end
S = cumsum(u)
plot(1:50,S,'+')

```

Dans ce script,  $g$  désigne la fonction  $g$  dont le code a été complété à la question 4(b).  
On exécute le script précédent et on obtient le graphique ci-dessous. Sur ce graphique, on a aussi tracé la courbe représentative de la fonction logarithme népérien  $\ln$  en trait plein.



Interpréter le contenu du vecteur ligne  $\mathbf{S}$  dans le contexte de l'énoncé. En notant pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ , que peut-on conjecturer à l'aide du graphique précédent sur la limite de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  ?

- (b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  par un calcul rigoureux.

## Exercice II - Inspiré d'ÉCRICOME ECT 2010

Cet exercice étudie deux jeux de un dés avec des dés équilibrés à six faces.

### I. Étude du premier jeu.

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

- Calculer la probabilité  $p$  de l'événement  $A$  : « Les deux dés donnent le même résultat ».
- Le joueur répète  $n$  fois le même jeu et on note alors  $Y_n$  le nombre de points obtenus par le joueur après ces  $n$  parties.
  - Reconnaître la loi de  $Y_n$  (*une justification soignée est attendue*).  
Donner explicitement  $P(Y_n = k)$  pour les valeurs  $k$  prises par  $Y_n$ .
  - Donner la valeur de l'espérance  $E(Y_n)$  de la variable aléatoire  $Y_n$  et sa variance  $V(Y_n)$ .
- Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.  
On note alors  $Z$  la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.
  - Reconnaître la loi de  $Z$  (*une justification soignée est attendue*).  
Donner explicitement  $P(Z = k)$  pour les valeurs  $k$  prises par  $Z$ .
  - Donner la valeur de l'espérance  $E(Z)$  de la variable aléatoire  $Z$  et sa variance  $V(Z)$ .

## II. Étude d'un deuxième jeu.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. (*On rappelle  $5^3 = 75$  et  $12^3 = 1728$ .*)

On note :

- $D_1$  le résultat du premier dé et  $D_2$  le résultat du deuxième dé
- $E_1$  l'événement :  $(D_1 < D_2)$ ,  $E_2$  l'événement :  $(D_1 = D_2)$  et  $E_3$  l'événement :  $(D_1 > D_2)$

Lors d'une partie,

- si l'événement  $E_1$  se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement  $E_2$  se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement  $E_3$  se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète  $n$  fois ce jeu. Pour tout entier naturel  $i \geq 1$ , on note :

- $X_i$  la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la  $i^{\text{ème}}$  partie ;
- $S_i$  le nombre de points marqués après  $i$  parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  (*On démontrera notamment que  $P(E_1) = \frac{5}{12}$* ).
2. Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_i$  puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire  $S_1$ .
4. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_2$  et donner sa loi.
5. (a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire  $S_3$ .  
(b) En utilisant un système complet d'évènement associé à  $S_2$ , calculer  $P(S_3 = 2)$ .
6. (a) Ecrire  $S_n$  en fonction des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .  
En déduire l'espérance mathématique  $E(S_n)$  de  $S_n$ .  
(b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

## Exercice III (A) - Probabilités

Les parties sont toutes indépendantes

### Partie I

Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur les risques de cancer, problèmes cardiovasculaires liés au tabac, décide d'arrêter de fumer ; toujours d'après des statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0,4 ; mais si elle a fumé un jour  $J_n$ , alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant  $J_{n+1}$  est 0,8 ; On note  $p_n$  la probabilité que cette personne ne fume pas au jour  $J_n$ .

1. Que vaut  $p_0$  ?
2. Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .
3. Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ . En déduire la valeur de  $p_n$  en fonction de  $n$  ?
4. Cette personne va-t-elle finir par arrêter de fumer ?

## Partie II

Un joueur joue au jeu TETRIS et passe les niveaux  $1, 2, \dots, n, \dots$  jusqu'à ce qu'il échoue. Il a une probabilité  $\frac{1}{n}$  de réussir le jeu de niveau  $n$ . Soit  $X$  le numéro du dernier niveau réussi. (Il finit toujours par échouer et la réussite des niveaux sont indépendants).

1. Donnez  $X(\Omega)$ . Trouver la loi de  $X$ .
2. Montrer que l'on a  $E(X) = e - 1$ .
3. A l'aide du théorème de Transfert, montrer que

$$E((X - 1)(X + 1)) = e$$

En déduire que  $X$  admet un moment d'ordre 2 et calculer sa variance.

## Partie III

Un établissement bancaire comporte 5 guichets numérotés de 1 à 5. Le nombre  $N$  de personnes arrivant à la banque en une journée suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On suppose que les clients choisissent leur guichet au hasard, indépendamment les uns des autres. On note  $X$  le nombre de clients arrivant au guichet n°3 en une journée.

1. Donner  $E(N)$  et interpréter la valeur  $\lambda$ .
2. Calculer  $P_{(N=n)}(X = k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  puis pour  $k > n$ .
3. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer  $P(X = k)$ .
4. Déduire la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

## Exercice III(B) - EML 2018

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et Face avec la probabilité  $\frac{1}{3}$ .

### Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire  $X$  prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements  $[X = 0]$ ,  $[X = 1]$ ,  $[X = 2]$  puis calculer leurs probabilités.
- (b) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$ .

### Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre  $n$  de Face obtenus, on place  $n + 1$  boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à  $n$  et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note  $U$  la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose  $V = X - U$ .

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $U$ .
- (b) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $U$  sachant  $[X = n]$ .

(c) En déduire, pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}$  :

$$P[U = k] = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P[X = n] \quad \text{puis} \quad P[U = k] = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

(d) Montrer que  $U$  admet une espérance et une variance et les calculer.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable  $V$ .

(b) Déterminer, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $V$  sachant  $[X = n]$ .

(c) En déduire la loi de  $V$ .

### Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie,  $p$  désigne un réel de  $]0; 1[$ .

Deux individus  $A$  et  $B$  s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur  $A$  dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité  $\frac{2}{3}$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur  $B$  dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité  $p$  et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note  $Y$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur  $A$  gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de  $B$  ; sinon c'est le joueur  $B$  qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs  $A$  et  $B$  ont la même probabilité de gagner.

#### 1. Simulation informatique

- (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire  $X$ .
- (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel  $p$  de  $]0; 1[$ , simule la variable aléatoire  $Y$ . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

---

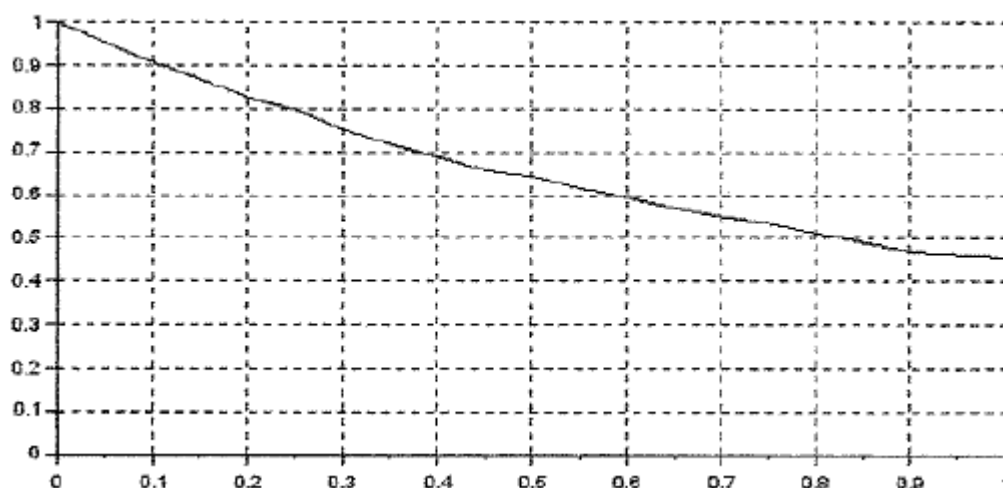
```

1. function r = mystere(p)
2. r = 0
3. N = 10^4
4. for k = 1:N
5. x = simule_X()
6. y = simule_Y(p)
7. if x <= y then
8. r = r + 1/N
9. end
10. end
11. endfunction

```

---

- (c) On trace, en fonction de  $p$ , une estimation de la probabilité que  $A$  gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de  $p$  pour lequel le jeu serait équilibré.

## 2. Étude de la variable aléatoire $Y$

On note  $Z$  la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur  $B$ .

- Reconnaître la loi de  $Z$  et préciser son(s) paramètre(s), son espérance et sa variance.
- Exprimer  $Y$  à l'aide de  $Z$  et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de  $Y$  et préciser leurs valeurs.
- Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P[Y \geq n] = (1 - p)^n$ .

3. (a) Montrer :  $P[X \leq Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X = n]P[Y \leq n]$ .

(b) Déduire des résultats précédents :  $P[X \leq Y] = \frac{4}{(2 + p)^2}$ .

- (c) Déterminer la valeur de  $p$  pour laquelle le jeu est équilibré.