

Durée : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°4

MATHÉMATIQUES

Vendredi 29 Mars, de 13h30 à 17h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I - Espaces Vectoriels

1. On considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid -x + y + 2z = 0 \text{ et } y - 3z = 0 \right\}$

(a) Expliquez ce que fait le programme scilab suivant

```
function y = isF(X)
  \X doit être un vecteur de taille 3
  y = 1
  if -X(1) + X(2) + 2*X(3) <> 0 then
    y = 0
  end
  if X(2) - 3*X(3) <> 0 then
    y = 0
  end
endfunction
```

(b) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) Écrire F sous la forme $\text{vect}(u)$ avec u un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

2. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que (u, v, w) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Écrire le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de u, v et w .

Exercice II - ECRICOME 2014

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- Déterminer le signe de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n existe.
- Écrire un programme Scilab qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N .
- Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
- Établir que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
- Établir que :

$$\forall x \geq e - 1, \quad f(x) \leq x \quad \text{et} \quad (x + 1) \ln(x + 1) \geq (x + 1)$$

En déduire que :

$$\forall x \geq e - 1, \quad f'(x) \geq 0$$

- Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - 1 \leq u_n$$

- Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L .

Exercice III - ECRICOME 2005

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1 - x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \quad \text{avec} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$$

- Calculer I_0 et I_1 .
- Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
- Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- Majorer la fonction $g : x \rightarrow e^{-2x}$ sur $[0, 1]$.
- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 8. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

9. En déduire la limite de la suite $(n I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 10. Déterminer la limite de la suite $(n(n I_n - 1))_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
 11. Donner alors les valeurs de a, b, c .

Exercice IV - ECRICOME 2018.

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}^{+*} et dresser son tableau de variations.
 - Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.
 - En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Écrire une fonction d'en-tête : **function y=u(n)** qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
- Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
 - Montrer que pour tout réel x positif,

$$x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}$$

- En déduire que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente. on note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
 - Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .
3. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$
 - On rappelle que l'instruction **floor(x)** renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question 1) e : a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('Entrer un réel strictement positif : ')
n=floor(1/eps)+1
disp(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

1. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq \frac{1}{n^2}$

(b) En déduire que la série de terme général a_n converge.

2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

(b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

(b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b.