Durée : 4 heures
Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°3

MATHÉMATIQUES

Vendredi 1er Février, de 13h30 à 17h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice I

On donne les approximations suivantes qui vous serviront au cours de l'exercice :

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25 \qquad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$$

$$\frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86$$

Préliminaire : Polynôme et étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$.
2. Factoriser P.
3. En calculant, pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\dfrac{2P(e^x)}{e^x}$ de deux manières différentes et en utilisant ce qui précède, justifier qu'on a l'égalité :

$$2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = \frac{2(e^x - 1)(e^x - 2)(e^x - 3)}{e^x}$$

4. Déduire des questions précédentes le signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ en dressant le tableau de signe.

Étude d'une fonction

On pose $v : x \to e^{2x} - 12e^x + 22x + 12e^{-x}$ et $h : x \to \dfrac{1}{v(x)}$.

(a) Étude de v.

i. Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant les calculs.

ii. Justifier proprement les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction v.

iii. Dresser le tableau de variation de la fonction v.

iv. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) > 0$.

(b) Quel est l'ensemble de définition de h ?

(c) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice II - ESCP 2016 - ECT (modifié)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Écrire un script Scilab permettant d'afficher le $n$ème terme de la suite u_n, n étant donné par l'utilisateur.
2. Établir pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

(a) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

4. (a) Justifier pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leq x$.

(b) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.

(c) En déduire pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité $u_n \leq (\ln 2)^n$.

(d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(e) On considère le programme *Scilab* suivant :

```
n=0 ; u =1
while u >= 0.0001
u = log(1+u^2)
n = n+1
end
disp(n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6. Quelle est la signification de ce résultat ?

(f) Établir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$.

Exercice III - ESCP ECT 2010 modifié.

La probabilité d'un événement est notée $\mathrm{P}(A)$*, et pour tout événement* B *vérifiant* $\mathrm{P}(B) \neq 0$*, on note* $\mathrm{P}_B(A)$ *la probabilité conditionnelle de* A *sachant* B.

Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.

Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :

• à l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0 ;

• si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k $(0 \leq k \leq n)$, alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. Ainsi $X_0 = 0$.

On note $\mathrm{E}(X_n)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. (a) Montrer que $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   (b) Montrer que l'ensemble $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$ forme un système complet d'événements. En déduire les égalités suivantes :
   $$\mathrm{P}([X_2 = 0]) = \frac{4}{9}, \qquad \mathrm{P}([X_2 = 1]) = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}([X_2 = 2]) = \frac{1}{9}$$
   (c) Calculer $\mathrm{E}(X_2)$.
   (d) Calculer $V(X_2)$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.
4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout k de $[\![1, n]\!]$,
   (a) Justifier l'égalité : $[X_n = k] = ([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1]) \cup ([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k])$.
   (b) Établir l'égalité : $\mathrm{P}([X_n = k]) = \dfrac{1}{3}\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) + \dfrac{2}{3}\mathrm{P}([X_{n-1} = k])$.
   (c) Déduire du résultat précédent que l'on a : $\mathrm{P}([X_n = 0]) = \dfrac{2}{3}P(X_{n-1} = 0)$.
   (d) Montrer alors que $P(X_n = 0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
5. (a) En utilisant la question 4.(c), montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
   $$\mathrm{P}([X_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{P}([X_{n-1} = n-1])$$
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de $\mathrm{P}([X_n = n])$ en fonction de n.
6. (a) En utilisant la définition de $\mathrm{E}(X_n)$ et la question 4.(c), montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
   $$\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1} k\mathrm{P}([X_{n-1} = k])$$
   (b) En déduire la relation de récurrence : $\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X_{n-1}) + \dfrac{1}{3}$.
   (c) Déterminer l'expression de $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.

Exercice IV -Inspiré d'INSEEC 2002

On définit pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par : $P_0(X) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) + (2 - 3nX^2)P_n(X) \tag{1}$$

1. Étude des polynomes
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 2^{n+1}$
   (b) Calculer $P_1(X)$ en utilisant la relation (1) et déterminer ses racines.
   (c) Montrer que $P_2(X) = 24X^4 - 36X^2 + 8$ et déterminer ses racines.
   (d) Montrer par récurrence que le polynôme P_n est de degré $2n$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$
   (a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^6}e^{-1/x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^9}e^{-1/x^2}$$
   (b) En déduire les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ou décroissante. Tracer son tableau de variation.
   (c) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est convexe ou concave.
   On rappelle qu'une fonction 2 fois dérivables est convexe (resp concave) si et seulement si $f''(x) > 0$ *(resp.* $f''(x) < 0$*)*
   (d) Conjecturer une formule pour la dérivée n-ème de f notée $f^{(n)}(x)$.
   (e) Démontrer cette formule par récurrence.
3. En scilab, un polynôme peut être modélisé par une matrice ligne ne comportant que les coefficients du polynôme. Ainsi la matrice $[2, 3, 5]$ correspondra au polynôme $P(X) = 2 + 3X + 5X^2$.
   (a) A quel polynôme correspondra la matrice $[1, 0, 2, 4]$?
   (b) Écrire $P_1(X)$ et $P_2(X)$ des questions $1(b)$ et $1(c)$ en Scilab.
   (c) Si un polynôme est de degré n, quelle sera la taille de sa matrice associée en Scilab ?
   (d) Compléter la fonction suivante qui pour un polynôme quelconque, permet d'obtenir le polynôme dérivée :

```
function Q = derive(P)
    n = size(P) \\permet d'obtenir la taille de la matrice P
    if n == 1
        Q = [.....]
    else
        Q = zeros(1,......)
        for k = 1 : ......
            Q(k) = ...........
        end
    end
endfunction
```