

---

**Durée** : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

# DEVOIR SURVEILLE N°1

---

## MATHÉMATIQUES

Vendredi 5 Octobre, de 13h30 à 17h30

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

**Exercice 1 (Quelques calculs pour débiter)**

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1.  $A = 27^{n+1} + 3^{n+2} \times 9^n.$
2.  $B = \ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2).$
3.  $C = \ln\left(\sqrt{\ln(e^{4x^2})}\right), x \in \mathbb{R}$
4.  $D = \frac{6(n+1)}{\frac{n(n-1)(2n-2)}{2n+2} \cdot \frac{1}{n^2(n-1)^2}}$

**Exercice 2 (Équations et inéquations)**

Résoudre les équations et les inéquations suivantes.

1.  $\ln(x-3) + \ln(x+1) = 3 \ln 2$
2.  $|3x+1| + |2x-4| = 5$
3.  $x^2 - 3x \leq 4$
4.  $1 + \frac{1}{2}x^2 \geq \ln(x)$

**Exercice 3 (Suites usuelles)**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n$  entier,  $u_{n+1} = 3u_n + 2$ . Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_0 = 1, v_1 = 3$  et pour tout  $n$  entier,  $v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$ . Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. Soient les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par  $a_0 = 0, b_0 = 1$  et pour tout  $n$  entier,

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$$

Montrer que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déterminer  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puis  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 4 (Démonstrations par récurrence)**

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ . Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+2u_n}}{2}$ . Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $0 < u_n \leq 1$ .

**Exercice 5 (Scilab)**

Les 3 questions sont indépendantes et par ordre de difficulté croissante.

1. On considère le programme
 

```
a = input('Entrez un réel')
a = a^2
a = a + 2*a
a = a + 1
disp(a)
```

- (a) Que fait le programme ci dessus ?
- (b) Que renvoie ce programme si l'utilisateur entre la valeur 2 ?
- (c) Existe-t-il une valeur de  $a$  pour laquelle l'ordinateur renvoie la valeur 0 ?

2. Le système Français utilise les degrés Celsius pour mesurer la température alors que le système anglo-saxon utilise les degrés Fahrenheit. Lorsqu'on connaît la température en degré Fahrenheit (F), on obtient la température en degré Celsius (C) grâce à la relation

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Le but de l'exercice est de créer un programme qui convertisse les degrés Celsius en degré Fahrenheit et inversement.

- (a) Par quel formule peut-on obtenir la température en degré Fahrenheit (F) quand on connaît la température en degré Celsius (C) ?
- (b) Voici le programme de conversion. Recopiez le programme sur votre feuille en complétant les pointillés.

```
disp("Ce programme permet de convertir les degrés Celsius ou les degrés
Fahrenheit. Pour commencer entrez la température à convertir puis préciser
s'il s'agit de degré Celsius (0) ou de degré Fahrenheit (1)")
```

```
T = input("Entrez la température à convertir")
type = input("Entrez 0 si la température est en degré Celsius. Entrez 1 si
la température est en degré Fahrenheit")
```

```
if type == ..... then // Cas ou la température est en degré Celsius
    T_convert = .....
    disp("La température est de '+string(T_convert)+' degrés Fahrenheit")
    .....
    T_convert = .....
    disp(".....")
end
```

3. On cherche à résoudre l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ . Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  et qui affiche
- les 2 solutions si le discriminant est positif,
  - l'unique solution si le discriminant est nul,
  - Il n'y a pas de solution si le discriminant est négatif.

### Exercice 6 (ECRICOME ECT 2011 - Exercice 1)

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. (a) Donner le domaine de définition de  $f$  et étudier la parité de  $f$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
- (b) Donner les valeurs de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. (a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x$  réel.
- (b) Construire le tableau de variation de  $f$ .
- (c) Après avoir calculé  $f(0)$ , déterminer le signe de  $f(x)$  selon les valeurs du réel  $x$ .
- (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0. On note cette droite  $T$ .
3. (a) Calculer la dérivée seconde de  $f$  et donnez le signe de  $f''(x)$ .

- (b) Construire sur un même schéma  $\mathcal{C}_f$  et  $T$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on considère dans cette question à l'équation  $(E_n)$  d'inconnue  $x : f(x) = n$ .
- (a) Montrer que l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution notée  $u_n$  (*on ne cherchera pas ici à calculer  $u_n$* ). Préciser la valeur de  $u_0$ .
- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'équation  $x^2 - nx - 1 = 0$  admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
- (c) A l'aide du changement de variable  $t = e^x$ , déterminer la solution  $u_n$  de  $(E_n)$  pour  $n$  entier naturel.

### Exercice 7 (Inspiré de EML 1995)

1. Soit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x \ln(1 + x)$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$ .
- (b) La fonction  $f$  admet-elle une parité? Si oui laquelle?
- (c) Calculer les limites de  $f$  au bord du domaine de définition.
- (d) Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .
- (e) En déduire son tableau de variations.
2. (a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ .
- (b) Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq x$ .
3. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} u_0 \in ]0; e - 1[ \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln(u_n + 1) \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in ]0; e - 1[$ .
- (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
4. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\begin{cases} u_0 > e - 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n \ln(u_n + 1) \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n > e - 1$ .
- (b) Quelle est la monotonie de la suite  $(u_n)$ ?