
Durée : 4 heures

Aucune sortie autorisée durant la première heure et le dernier quart d'heure.

DEVOIR SURVEILLE N°0

MATHÉMATIQUES

Septembre 2018

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 (Calcul littéral)

- Développer et réduire l'expression $A = 3x^2 - (x - 2)(2x + 3)$.
- Factoriser l'expression $B = (2x + 3)^2 - (4x + 1)(2x + 3)$.

Exercice 2 (Fractions)

Écrire sous la forme la plus simple possible les fractions suivantes.

$$1. C = \frac{24}{18} \times \frac{81}{12} \times \frac{36}{27}. \quad 2. D = \frac{3}{8} - \frac{5}{20} + \frac{1}{5}. \quad 3. E = \frac{50}{49} \times \frac{49}{48} \times \dots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1}$$

Exercice 3 (Racines carrées)

Simplifier au maximum les expressions suivantes en faisant disparaître la racine carré du dénominateur le cas échéant :

$$1. F = (\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3). \quad 2. G = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}. \quad 3. H = \sqrt{48}.$$

Exercice 4 (Puissances)

Écrire les expressions suivantes sous la forme x^a .

$$1. I = \frac{x^7 \times x^{-4}}{x^2}. \quad 2. J = (x^3)^2 \times \frac{x^2}{(-x)^4 x^{-2}}.$$

Exercice 5 (Équations)

Résoudre les équations suivantes par la méthode de votre choix.

$$1. x^2 - 6x + 9 = 0. \quad 2. (2x + 1)^2 - 25 = 0. \quad 3. (\ln(x) - 1)(2 - 5 \ln(x)) = 0.$$

Exercice 6 (Logarithme)

Simplifier les expressions suivantes

$$1. K = 2 \ln(x^4) + 3 \ln(x^2) - 5 \ln(x). \quad 2. L = \ln\left(\frac{\sqrt{6} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{6} - 1}{2}\right).$$

Exercice 7 (Exponentielle)

Simplifier les expressions suivantes

$$1. M = \ln(\sqrt{e}). \quad 2. L = (e^{3x})^2 \times \frac{e^{-2x}}{e^{4x}}.$$

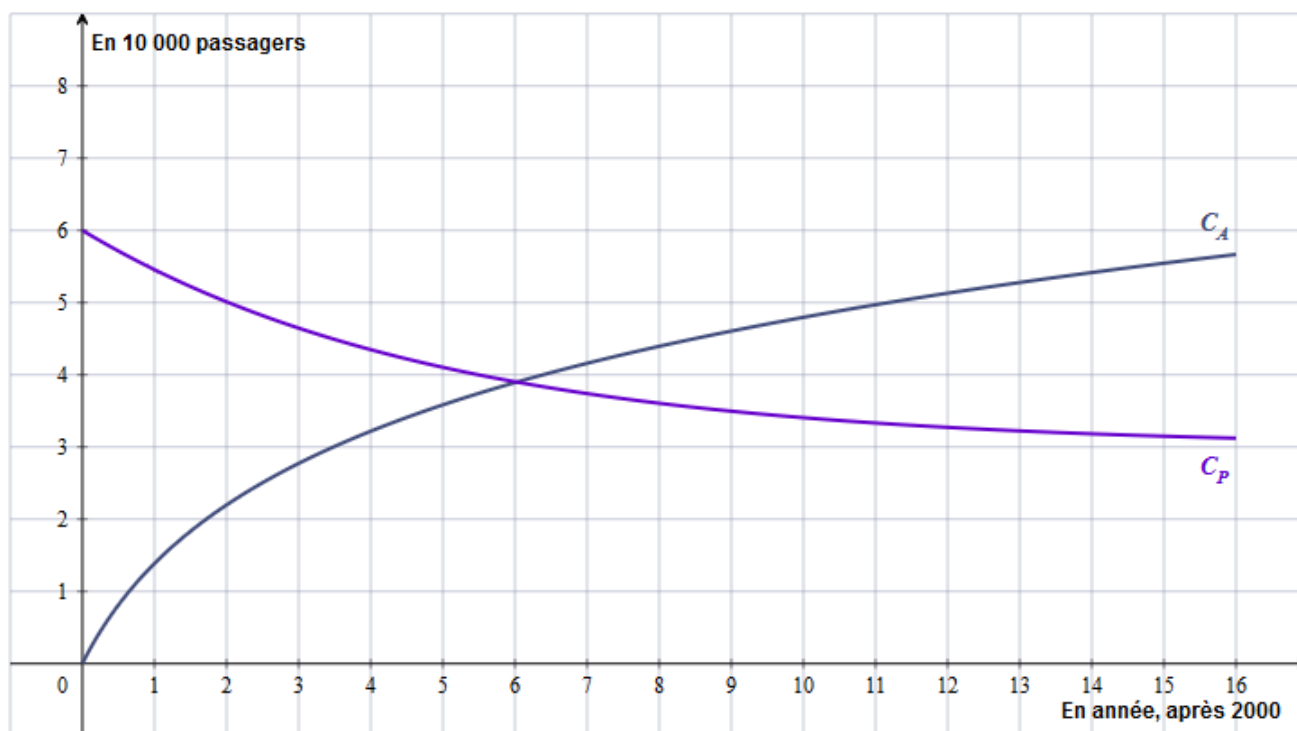
Exercice 8 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes par la méthode de votre choix.

$$1. \frac{3x}{4} - \frac{1}{3} \leq -\frac{4}{9}. \quad 2. 4x^2 + 2x \geq 0. \quad 3. \frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1}.$$

Exercice 9 (Fonction exponentielle)

Une compagnie aérienne propose à partir du premier janvier de l'année 2000 une nouvelle formule d'achat de billets, la formule *Avantage* qui s'ajoute à la formule *Privilège* déjà existante. Une étude a permis de modéliser l'évolution du nombre de passagers transportés depuis l'année 2000 et la compagnie admet que ce modèle est valable sur la période allant de l'année 2000 à l'année 2016. Le nombre de passagers choisissant la formule *Privilège* est modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0; 16]$ et le nombre de passagers choisissant la formule *Avantage* est modélisé par la fonction A définie sur l'intervalle $[0; 16]$. Le graphique donné ci-dessous représente les courbes représentatives \mathcal{C}_P et \mathcal{C}_A de ces deux fonctions. Lorsque x représente le temps en année à partir de l'année 2000, $P(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Privilège* et $A(x)$ représente le nombre de passagers, exprimé en dizaine de milliers, choisissant la formule *Avantage*.



PARTIE A

Dans cette partie, les estimations seront obtenues par lecture graphique.

1. Donner une estimation du nombre de passagers qui, au cours de l'année 2002, avaient choisi la formule *Privilège*.
2. Donner une estimation de l'écart auquel la compagnie peut s'attendre en 2015 entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*.
3. Comment peut-on interpréter les coordonnées du point d'intersection des deux courbes au regard de la situation proposée ?
4. Justifier que la compagnie aérienne peut, selon ce modèle, estimer que le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

PARTIE B

On admet que la fonction A est définie sur l'intervalle $[0; 16]$ par $A(x) = 2 \ln(x + 1)$ et que la fonction P est définie sur l'intervalle $[0; 16]$ par $P(x) = 3 + 3e^{-0,2x}$.

On s'intéresse à la différence en fonction du temps qu'il y a entre le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* et ceux ayant choisi la formule *Privilège*. Pour cela, on considère la fonction E définie sur l'intervalle $[0; 16]$ par $E(x) = A(x) - P(x)$.

1. On note E' la fonction dérivée de E sur l'intervalle $[0; 16]$.

(a) Montrer que

$$E'(x) = \frac{2}{x+1} + 0,6e^{-0,2x}.$$

Justifier que E' est strictement positive sur l'intervalle $[0; 16]$.

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction E sur l'intervalle $[0; 16]$.

2. (a) Montrer que l'équation $E(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , sur l'intervalle $[0; 16]$.

(b) Dresser le tableau de signes de la fonction E sur l'intervalle $[0; 16]$.

Exercice 10 (Probabilités)

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40% des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B. Il a été constaté que 85% des pommes provenant du fournisseur A sont commercialisables. La proportion de pommes commercialisables est de 95 % pour le fournisseur B. Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les événements suivants :

A : « La pomme provient du fournisseur A ».

B : « La pomme provient du fournisseur B ».

C : « La pomme est commercialisable ».

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Montrer que la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09.
3. La pomme choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois plus de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Pour les parties B et C, on donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

PARTIE B

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

1. Quelle est la probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables ?

PARTIE C

Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 200 pommes. Il s'aperçoit que 22 pommes sont non commercialisables.

Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ?

Exercice 11 (Suites)

Le 1^{er} septembre 2016, un ensemble scolaire compte 3000 élèves. Une étude statistique interne a montré que chaque 1^{er} septembre :

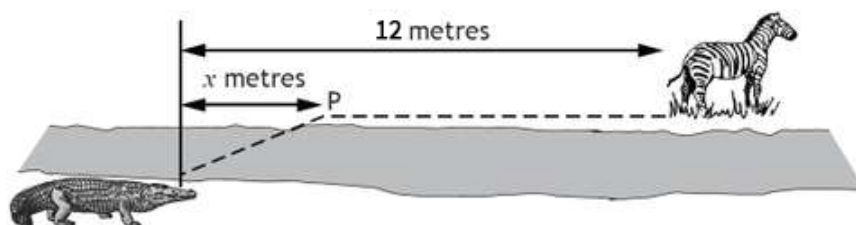
- 10% de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre d'élèves le 1^{er} septembre de l'année 2016 + n .

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0.9u_n + 250$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 2500$.
 - (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0 .
 - (b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. La capacité optimale d'accueil est de 2800 élèves. Ainsi, au 1^{er} septembre 2016, l'ensemble scolaire compte un sur-effectif de 200 élèves.
Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sur-effectif.

Exercice 12 ()

Un crocodile a repéré une proie située à 12 mètres de lui sur la berge opposée d'une rivière. Le crocodile se déplace à une vitesse différente sur terre et dans l'eau. Le temps que met le crocodile à atteindre le zèbre peut être réduit s'il traverse la rivière en visant un certain point P , placé à x mètres du point de départ sur l'autre rive (voir schéma).



Le temps T nécessaire pour faire le trajet est donné par l'équation indiquée ci-dessous (en dixièmes de seconde) :

$$T(x) = 2\sqrt{81 + x^2} + (12 - x).$$

1. Calculer en combien de temps le crocodile rejoindra le zèbre uniquement à la nage.
2. Calculer en combien de temps le crocodile rejoindra le zèbre s'il coupe la rivière au plus court.
3. Entre ces deux extrêmes, montrer qu'il existe une valeur de x qui minimise le temps nécessaire et que cette valeur est comprise dans l'intervalle $[5; 6]$.