DEVOIR MAISON BONUS n^o 1

Exercice 1. On dépose au hasard un cadeau derrière l'une d'entre trois portes. Un jeu consiste à trouver ce cadeau en deux étapes. D'abord vous choisissez une porte ; puis l'organisateur vous montre parmi les deux portes restantes, une porte derrière laquelle le cadeau ne se trouve pas. Vous avez alors la possibilité entre changer de choix où le garder : que faites-vous ?

Exercice 2. On travaille sur les matrices symétriques

(1) Montrer que si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n alors ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(2) En déduire que si $(A,B) \in S_n(\mathbb{R})^2, A+B \in S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(1) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$.

(2) Soit $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de réels. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)$.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, calculer les sommes suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(4^{2-k} + 5^k 6^{n-k+1})$, (2) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} 2^{3k+2}\binom{n}{k-1}$.

Exercice 5.

(1) Soient a et b deux rationnels vérifiant $a < b$, on note $c = \dfrac{a+b}{2}$. Montrer que c est un nombre rationnel vérifiant $a < c < b$.

(2) En déduire, grâce à un raisonnement par l'absurde, qu'il n'existe pas de plus petit rationnel strictement supérieur à 1.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 7. On dit que A carrée d'ordre n est antisymétrique si ${}^tA = -A$. Montrer qu'une matrice carrée A peut toujours s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.