A rendre pour le 30 Janvier 2019

Exercice 1 Matrices

Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont inversibles et les inverser le cas échéant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 - Fonctions et polynômes

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln(x)$ et P la fonction polynôme déterminée par $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^3 - x - 2$.
   (a) Montrer que le polynôme P se factorise par $(x - 1)$.
   (b) Déterminer les 3 réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
   (c) En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.
   (d) Exprimer g' en fonction de P, calculer les limites de g aux bords de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de g.
   (e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) > 0$.
3. Étude de la fonction f :
   (a) Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire : $\forall x \in Df; f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   (b) En déduire les variations de f.

Exercice 3 - Probabilités et suites

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires et U_2 contient une boule blanche et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise d'une boule selon le protocole suivant :

— le premier tirage se fait dans l'urne U_1
— si le $n$ème tirage a donné une boule blanche (resp. noire), le $n + 1$ème tirage s'effectue dans l'urne U_1 (resp. U_2).

On introduit les événements B_n (resp N_n) "le $n$ème tirage donne une boule blanche (resp. noire) " et on note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 puis p_2.
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{4}$.
4. En déduire p_n en fonction de n ; puis déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.