A rendre pour le 19 Décembre 2018

Exercice 1 (Étude de fonctions)

Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

Exercice 2 (Inverse de matrice et résolution de système)

1. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
2. (a) Calculer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire les solutions du système linéaire : $\begin{cases} 3x + 2y - z & = 5 \\ x - y + z & = 1 \\ 2x - 4y + 5z & = -3 \end{cases}$.
3. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} -2x - 2y + z = \lambda x \\ -2x + y - 2z = \lambda y \\ x - 2y - 2z = \lambda z \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?

   (b) Résoudre le système selon les valeurs de λ.

Exercice 3 - Fonctions et Variables aléatoires

Terrassé par la perte de son fidèle ami Osorno emporté par la déesse Mapuche, et chassé du Villarica par les flammes noires de sa récente éruption, notre jeune condor Puyehue décida de réaliser un voyage initiatique à travers les Andes. Celui-ci l'amena à rencontrer une jeune condor nommée Chiloé. Et aujourd'hui il songe à sa descendance. Il faut savoir que le condor se reproduit de la manière suivante, il a 2 descendants avec probabilité $p \in]0,1[$, et 0 descendant avec probabilité $1-p$. On note X_n le nombre de descendants de Puyehue à la $n - ieme$ génération. On s'intéresse à $P(X_n = 0)$, c'est à dire à la probabilité que la lignée de Puyehue soit éteinte à la $n - ieme$ génération.

1. Soit $f(x) = px^2 + 1 - p$ une fonction définie sur $[0,1]$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   (a) Tracer le tableau de variations complet de f.

(b) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

(c) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

(d) En déduire que $(u_n)_n$ converge. On note ℓ sa limite.

(e) Montrer que si $p \leq 1/2$, $\ell = 1$.

(f) Montrer que si $p > 1/2$, $\ell = \frac{1}{p} - 1$ (on pourra au préalable montrer que si $p > 1/2, u_n \leq \frac{1}{p} - 1, \forall n \geq 0$).

2. (a) On remarque que $X_0 = 1$. Déterminer la loi de X_1 et X_2.

(b) Montrer que $(X_1 = 0, X_1 = 2)$ est un système complet d'événements.

(c) Justifier que $P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)^2$.

(d) Montrer en utilisant la FPT que

$$P(X_{n+1} = 0) = 1 - p + pP(X_n = 0)^2.$$

(e) En déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$. Interpréter.