A rendre pour le 5 Décembre 2018

Exercice 1

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{x\ln(x) - 1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
5. Prouver l'existence d'un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$f(\alpha) = 0$$
Justifier que $\alpha \in [1; e]$.

Exercice 2 : Dénombrement

Pour son vélo, Paul possède un antivol à code. Le code est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9.

1. Paul a oublié son code. Combien de combinaisons doit-il essayer dans le pire des cas avant de retrouver la bonne ?
2. Même question en supposant que Paul se souvient que son code commence par un 8.
3. Même question en supposant que Paul se souvient que son code se termine par un chiffre pair.
4. Même question en supposant que Paul se souvient que son code ne contient que des chiffres pairs.
5. Même question en supposant que Paul se souvient que son code ne contient que des chiffres impairs.
6. Même question en supposant que Paul se souvient que son code contient au moins un chiffre pair.
7. Même question en supposant que Paul se souvient que son code contient exactement un chiffre pair.

Exercice 3 - Étude de fonction

On considère la fonction définie sur $]0; +\infty[$, $f : x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}$.

1. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
2. Établir : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$
3. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$. et le sens de variation de f
4. Dresser le tableau de variation de f. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
5. Préciser la nature des asymptotes de la courbe représentative C de f en 0.
6. Tracer l'allure de C. On précisera et on tracera la tangente au point d'abscisse 1.