A rendre pour le 21 Novembre 2018

Exercice 1

Première partie : Puissance de matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que P est inversible et que $P^{-1} = Q$.
2. Calculer $D = P^{-1}MP$.
3. Montrer que $\forall n \geq 0, M^n = PD^nP^{-1}$.
4. Montrer que $M^n = \begin{pmatrix} (1/3)^n & 0 & 0 \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n & (1/2)^n & 0 \\ 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n & 1 - (1/2)^n & 1 \end{pmatrix}$
5. Vérifier que la formule obtenue à la question précédente est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Deuxième Partie : Probabilités

Soit une urne contenant trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant le protocole suivant.

On tire une boule dans l'urne. On remet alors la boule tirée, mais on retire de l'urne les boules ayant un numéro strictement supérieur à celui de la boule tirée. Et on passe au tirage suivant.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 1, on remet la boule numéro 1 dans l'urne mais on enlève la boule numéro 2 de l'urne. Ainsi, le tirage suivant se fera dans une urne contenant les boules numéro 0 et 1.

Pour $n \geq 0$, on note les événements suivants

A_n : à l'issue du n-ème tirage l'urne contient 3 boules.
B_n : à l'issue du n-ème tirage l'urne contient 2 boules.
C_n : à l ?issue du n-ème tirage l'urne contient 1 boule.
On note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n)$.

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On remarque que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $U_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.
2. Justifiez que pour tout $n \geq 1$, A_n, B_n, C_n est un système complet d'événements.
3. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \geq 0$, $U_{n+1} = MU_n$.
4. En déduire (par récurrence) que $\forall n \geq 0, U_n = M^nU_0$.
5. En déduire que $U_n = \begin{pmatrix} (1/3)^n \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n \end{pmatrix}$.
6. On note D_n l'événement "le n-ième tirage est le premier tirage à l'issue du quel il n'y a plus qu'une boule dans l'urne".
   (a) Calculer $P(D_1)$.
   (b) A l'aide de la formule des probas totales, montrer que $P(D_2) = 5/18$.
   (c) A l'aide de la formule des probas totales, montrer que $\forall n \geq 2$, $P(D_n) = 2(1/2)^n - 2(1/3)^n$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3$. On propose 3 méthodes de calcul de S_n.

1. **Première méthode**
   (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Développer $(2k+1)^3$.
   (b) En déduire alors que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.
2. **Deuxième méthode** Montrer par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.
3. **Troisième méthode** On introduit $T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3$.
   (a) Comparer $S_n + T_n$ et U_n.
   (b) Calculer T_n et U_n.
   (c) En déduire alors que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.

Exercice 3 : Dénombrement

Joan va acheter trois livres de maths et deux bandes dessinées. Dans le magasin, il y a dix livres de maths et vingt bandes dessinées.

Dans cet exercice on prendra tout particulièrement soin de justifier les réponses et d'expliquer le raisonnement.

1. De combien de façons Joan peut-il faire ses achats ?
2. De retour chez lui, Joan forme une pile avec ses nouveaux livres. De combien de façons peut-il le faire ?
3. Même question si Joan souhaite que ses livres de math se trouvent en bas de la pile, et ses bandes dessinées en haut.
4. Même question si Joan souhaite que ses livres de math se suivent dans la pile(mais pas nécessairement les bandes dessinées).