

A rendre pour le 17 Octobre 2018

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = -1$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 - 2a_n}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < 0$.
2. Écrire un script Scilab permettant de calculer le maximum et le minimum de a_n pour $n \in \llbracket 0, 100 \rrbracket$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{1}{a_n}$. Pourquoi est-ce possible ?
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 3t_n - 2$.
5. Trouver l'expression de t_n en fonction de n .
6. En déduire a_n en fonction de n .

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}.$$

1. Montrer que pour tout réel $x : e^x \geq x + 1$. Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $u_n > 0$.
3. Recopier et compléter le programme SCILAB suivant qui permet d'afficher les cents premiers termes de la suite.

```

u = 1
for n = 1:99
    u = .....
    disp(.....)
end

```

4. Écrire ce programme SCILAB et lancez le. Quelle conjecture peut-on faire quand à la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?
5. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
6. À l'aide de la question 1. montrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n}$$

7. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \frac{1}{n}$.

Exercice 3 : Probabilités

Deux pièces (une chambre et la salle) A et B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur.

Une guêpe initialement (à l'instant 0) dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$ son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est dans la pièce A au temps n , alors au temps $n + 1$ elle reste en A avec une probabilité de $1/3$ et elle passe dans la pièce B avec une probabilité de $2/3$.
- Lorsqu'elle est en B au temps n , alors au temps $n + 1$ elle retourne en A avec une probabilité de $1/4$, elle reste en B avec une probabilité de $1/2$ et elle sort à l'air libre avec une probabilité de $1/4$.
- Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier n , on notera

- A_n l'événement "la guêpe est dans la pièce A à l'instant n "
- B_n l'événement "la guêpe est dans la pièce B à l'instant n "
- D_n pour "être dehors à l'instant n "
- S_n l'événement "la guêpe sort à l'instant n ".
- $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$, $d_n = P(D_n)$ et $s_n = P(S_n)$.

1. (a) En cherchant les réponses dans l'énoncé, déterminer les probabilités a_0 , b_0 , s_0 , et s_1 .
- (b) Calculer a_1 , b_1 , et s_2 .
- (c) Sachant qu'à l'instant 2 elle est en A , quelle est la probabilité qu'elle ait été en B à l'instant 1?
- (d) Justifier que pour tout entier n :

$$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \text{ et } B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$

et en déduire pour tout entier n , les relations de récurrence suivantes :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$$

- (e) Écrire un script scilab qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et calcule a_n et b_n .
- (f) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$.
- (g) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
- (h) En déduire pour $n \geq 1$, l'expression de a_n et de b_n en fonction de n .
2. (a) Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$ et en déduire s_n en fonction de n .
- (b) Déterminer la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)