A rendre pour le 3 Octobre 2018

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

A. Étude sur $]0,+\infty[$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
   (b) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ et déterminer son signe.
2. (a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) = 1 + \dfrac{2}{e^{2x}-1}$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de f en 0 par valeur strictement supérieure.
3. En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$. Déterminer le signe de f sur $]0,+\infty[$.
4. Primitives de f sur $]0,+\infty[$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction g définie par :
   $$g(x) = \ln(e^{2x}-1) - x.$$
   (b) En déduire une primitive de f sur $]0,+\infty[$.
   (c) Déterminer la limite de g en 0 par valeur supérieure.
   (d) En écrivant $e^{2x}-1 = e^{2x}(1-e^{-2x})$, déterminer la limite de g en $+\infty$.
   (e) Déterminer les variations de g et dresser son tableau de variation.

B. Construction de $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f.

1. Montrer que pour tout x non nul, $f(x)+f(-x)=0$. En déduire les symétries de $\mathscr{C}$.
2. Calculer $f(\ln(3))$ et $f'(\ln(3))$(on donnera leur valeur exacte). Donner l'équation de la droite Δ tangente à la courbe en $x=\ln(3)$. Construire la droite Δ et $\mathscr{C}$. On donne les valeurs approchées :

ln(3)	5/4	9/16	9/32
1,1	1,2	0,6	0,3

Exercice 2 : Étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans toute cette partie, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = e\sqrt{u_n - 1} + 1.$$

1. On étudie dans cette partie la fonction $f : x \to e\sqrt{x-1} + 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction f et le signe de f'.
   (c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et tracer le tableau de variation.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (e) Montrer que $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in [1; 1+e^2]$.
   (f) Montrer que l'équation de la tangente à f en $x = 1 + e^2$ est donnée par
   $$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1+e^2).$$
2. On considère $u_0 = 1 + e^2$. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. On cherche à déterminer une expression pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 > 1$. On pose alors
   $$v_n = \ln(u_n - 1).$$
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   (b) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}v_n$.
   (d) On introduit la suite (w_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - 2$. Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (e) Exprimer w_n puis v_n en fonction de n et de v_0.
   (f) En déduire u_n en fonction de n et de u_0.

Exercice 3 : Récurrences

Démontrer les résultats suivants par récurrences :

1. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que, pour tout $n \in N$, $0 < u_n < 2$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geq 1 + na$.
3. La suite de Fibonacci (u_n) est défini par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$. Démontrer par récurrence (forte) que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.