A rendre pour le Mardi 14 Mai 2019

Exercice 1

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement " on choisit l'urne U_1 ".
- C_2 l'événement " on choisit l'urne U_2 ".

1. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:

$$P_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

2. Calculer $P_{C_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).

3. Montrer que :

$$P(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

4. Calculer l'espérance de Y.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T = 4$ et $U = 1$.

1. Préciser les valeurs prises par T.

2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$P(T = k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

3. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Calculer $P([U = 1] \cap [T = 2])$.
   (b) Calculer $P([U = 1] \cap [T = k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.
5. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.
   (a) Calculer $P([U = j] \cap [T = j + 1])$.
   (b) Que vaut $P([U = j] \cap [T = k])$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j + 1$?
6. Les variables aléatoires T et U sont- elles indépendantes ?
7. Calculer $P(U = 1)$ puis déterminer la loi de U.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ et étudier sa convexité sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, t
   elles que $0 < a < 1 < b$.
4. Montrer : $b \in [2; 4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'
   elle converge et préciser sa limite.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
4. (a) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n) qui, prenant en argument un entier` n `de` $\mathbb{N}$`, renvoie la valeur de` u_n.
   (b) `Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif,`
   `elle renvoie une valeur approchée de` b `à epsilon près.`

```
1. function b = valeur_approchee(epsilon)
2. n = 0
3. while ........
4. n = n+1
5. end
6. b = suite(n)
7. endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :
$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

1. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$
2. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.
4. (a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

   (b) Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
   On admet quer la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
5. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
   Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie I

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
   En déduire $E(Z_1)$ et $E(Z_2)$.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.

   (b) Montrer, pour tout $\ell \in [[1,n]]$: $\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1)$.

   (c) En déduire : $E(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}E(Z_k) + 1$.
3. (a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = E(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

   (b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $E(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie II

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k \geq 5)$.
2. Montrer : $\mathrm{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.
3. On note, pour tout i de $[[1;4]]$, A_i l'événement :

   " la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages".

   (a) Montrer : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\mathrm{P}(A_1) - 6\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + 4\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

   (b) Calculer, $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

   (c) En déduire : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $P(Z_k = 3)$ et $P(Z_k = 4)$.