

A rendre pour le Vendredi 10 Mai 2019

Exercice 1

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 : U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires et U_2 contient une boule blanche et 3 boules noires. On effectue des tirages avec remise d'une boule selon le protocole suivant :

- le premier tirage se fait dans l'urne U_1
- si le $n^{\text{ième}}$ tirage a donné une boule blanche (resp. noire), le $n + 1$ ième tirage s'effectue dans l'urne U_1 (resp. U_2).

On introduit les événements B_n (resp. N_n) "le $n^{\text{ième}}$ tirage donne une boule blanche (resp. noire) " et on note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 puis p_2 .
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}$.
4. En déduire p_n en fonction de n ; puis déterminer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

On considère l'application φ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

La courbe représentative de φ sera notée \mathcal{C} . On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$

1. Déterminer la limite de φ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de φ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
4. Montrer que φ est strictement monotone sur \mathbb{R}_+^* .
5. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
6. Déterminer la convexité de φ sur \mathbb{R}_+^* .
7. Déterminer l'équation de la tangente de φ en 1. On notera (Δ) la droite tangente à la courbe en $x = 1$.
8. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) > -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

9. Tracer dans un même graphique les courbes \mathcal{C} et (Δ) .
10. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

11. Proposer un programme Scilab permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 3

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
 Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $p \in]0, 1[$.
 Les résultats des lancers de ces pièces seront toujours supposés indépendants.

Dans cette partie, on effectue le jeu suivant : *Les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'au moins une des deux pièces donne PILE.*

Si A et B ont fait PILE simultanément, le jeu s'arrête sans que personne n'ait gagné d'argent.

Sinon, le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue ses lancers jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série "en solitaire".

Par exemple, si A a obtenu PILE pour la première fois à son 7-ième lancer et si B a obtenu PILE pour la première fois à son 11-ième lancer, c'est B qui doit payer à A la somme de 4 euros.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A et Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur B et $Z = Y - X$.

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre.

Préciser $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et les valeurs de $P(X = k)$, $P(Y = k)$, $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.

2. (a) Montrer que $E(Z) = \frac{1 - 3p}{p}$.

(b) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \frac{p}{1 + 2p}$ et en déduire $P(Z = 0)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(Z = n) = \frac{p}{1 + 2p}(1 - p)^n$ et en déduire $P(Z > 0)$.

En déduire $P(Z < 0)$ puis interpréter les événements $(Z = 0)$, $(Z > 0)$, $(Z < 0)$.