

A rendre pour le Vendredi 5 Avril 2019

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.
- (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
 - (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .
 - (b) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^n (v_k - v_{k+1})$.
 - (c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 2

Espaces Vectoriels

1. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$?
2. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid -x + 2y + z = 0 \text{ et } y + 3z = 2x \right\}$ est un espace vectoriel.
3. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
 - (b) Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 3

On va remonter dans cet exercice que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente sans utiliser les séries de Riemann.

1. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que

$$\forall k \geq 1, \quad 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

2. En déduire que $\forall n \geq 1, 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
3. Que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et de la limite de son terme général ?

Exercice 4

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

1. $a = \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$.

2. $b = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^n}$.

3. $c = \sum_{n \geq 2} n(-1)^n x^{n-2}$.