

A rendre pour le Mercredi 27 Mars 2019

Exercice 1

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de F , et préciser son signe.
 (b) Étudier la parité de F . (Penser à un changement de variable)
 (c) Justifier que F est C^1 sur \mathbb{R} , puis donner son sens de variation.
2. (a) En justifiant que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{2}{(1+t)^2}$, montrer que $\forall x \geq 0, F(x) \leq 2$.
 (b) En déduire que la fonction F admet une limite L en $+\infty$ et que $L \leq 2$.
3. Montrer que $\forall x \geq 0, F(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$ et en déduire que $L \geq 1$.
4. Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution sur $[0, +\infty[$.
5. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.
 (a) Justifier que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer G' .
 (b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = 2F(1)$.
 (c) En faisant tendre x vers $+\infty$ dans G , montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 2

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout entier n strictement positif par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx$$

1. Calculer le premier terme u_1 de la suite.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.
4. Montrer que l'on a, pour tout entier n strictement positif : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n}$.
5. En déduire une fonction Scilab qui prend un entier n strictement positif et qui renvoie u_n , le n -ième terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leq 2u_n \leq \frac{1}{n-1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

7. À l'aide de l'inégalité précédente, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

Exercice 3

On note $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \sum_{k=2}^n f(k)$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln(n)}$$

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

- (c) Établir : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.
5. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n \ln(n)}$$

- (b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près et donner le script Scilab permettant d'obtenir cette valeur.