

A rendre pour le Mercredi 13 Mars 2019

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \int_0^1 f(x) dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \end{array} \right.$$

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de f , relativement à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etude de f .

1. Montrer que la fonction f est paire sur \mathbb{R}
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur \mathbb{R}
5. Donner l'allure de \mathcal{C}_f
6. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unique réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :

$$f(x) = y$$

8. Déterminer alors la bijection réciproque f^{-1}

2) Calcul d'aire

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{2\lambda} f(x) dx$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

En déduire l'ensemble de définition de F .

2. Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R}
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

3) Etude de la suite (u_n) .

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. Effectuer une intégration par parties et calculer u_3 .
(On pourra remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) .
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)