

A rendre pour le 20 Février 2019

## Exercice 1 - Étude de fonction et suites

On souhaite déterminer le nombre de solutions de  $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$  ainsi que la valeur approchée d'une des racines.

1. Montrer que  $(E)$  admet 3 solutions réelles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  telles que  $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$ .
2. On veut obtenir une approximation de  $\beta$ . On introduit  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$  et la suite  $u$  définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$ .
  - (a) Justifier que  $\beta \in [0, 1/2]$  et montrer que  $\beta$  est solution de l'équation  $g(x) = x$ .
  - (b) Montrer que  $[0, 1/2]$  est stable par  $g$  et que  $\forall x \in [0, 1/2], |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .
  - (c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1/2]$ .
  - (d) Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$  puis que  $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$ .
  - (e) Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$  ?
  - (f) Écrire un programme Scilab qui renvoie une valeur approchée de  $\beta$  à  $10^{-9}$  près.

## Exercice 2 - Étude de fonction et suites

Soit  $a \in ]0, +\infty[$ . Soit de plus  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, +\infty[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

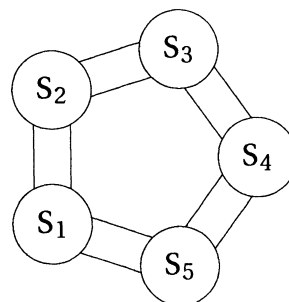
$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $u_n$  existe bien et est strictement positif.
2. Soit l'application  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ . Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $f(x) \geq \sqrt{a}$ .
3. (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \sqrt{a}$ .  
 (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone à partir du rang 1.  
 (c) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in [\sqrt{a}, +\infty[$ .  
 (d) Déterminer  $\ell$ .
4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left( \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2$ .  
 (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} = \left( \frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}} \right)^{2^n}$ .

## Exercice 3 - Probabilités

Deux personnes  $P_1$  et  $P_2$  ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites  $S_1, S_2, S_3, S_4$  et  $S_5$ , disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.

Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu,  $P_1$  se présente au site  $S_1$  et  $P_2$  au site  $S_2$ .



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

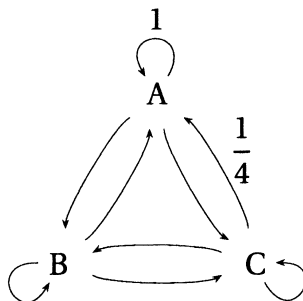
### A. Modélisation du problème

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit les trois événements  $A_n, B_n, C_n$  :

- $A_n$  : « les deux personnes sont sur le même site après le  $n$ -ième déplacement »
- $B_n$  : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le  $n$ -ième déplacement »
- $C_n$  : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le  $n$ -ième déplacement »

On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités des événements  $A_n, B_n, C_n$ .

1. Justifier que  $A_n, B_n, C_n$  forment un système complet d'événements.
2. Déterminer les valeurs de  $a_0, b_0$  et  $c_0$ .
3. (a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{4}$ .  
Indication : Cette notation signifie  $P(A_{n+1})$  sachant  $C_n$
- (b) Justifier  $P(A_{n+1}|A_n) = 1$
- (c) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-dessous



4. Etablir les relations suivantes pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :
 
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$
5. (a) Exprimer  $b_{n+2}$  à l'aide de  $b_{n+1}, b_n$  et  $c_n$  puis exprimer  $c_n$  en fonction de  $b_{n+1}$  et  $b_n$  pour obtenir enfin une relation entre  $b_{n+2}, b_{n+1}$  et  $b_n$
- (b) En déduire une expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ .  
on fera intervenir les nombres  $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$  et  $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$
- (c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $c_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\beta^n - \alpha^n)$ .
6. (a) Exprimer  $a_n$  en fonction de  $n, \alpha$  et  $\beta$ . (on pourra s'intéresser à la somme  $a_n + b_n + c_n$ ).
- (b) Déterminer la limite de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?