

A rendre pour le 20 Février 2019

## Exercice 1 - Étude de fonction et suites

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n),$$

où  $a$  est un réel tel que  $0 < a < 1$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f : x \rightarrow x(2 - x)$ .
2. (a) Montrer par récurrence que , pour tout entier  $n$ ,  $0 < u_n < 1$ .  
 (b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
 (c) En déduire que la suite est convergente. Déterminer sa limite.
3. On considère la suite numérique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = 1 - u_n$$

- (a) Exprimer pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .
- (b) En déduire (par récurrence), que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_n = (1 - a)^{2^n}$ .
- (c) Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ . Retrouver la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps  $t = 0$ ), la machine à café à une probabilité  $a$  d'être cassé ( $0 < a < 1$ ). On notera  $A_n$  l'événement "la machine est cassé au temps  $t = n$ " et  $p_n = p(A_n)$ . Si la machine est cassé au temps  $t = n$  elle reste cassé au temps  $t = n + 1$ . Si la machine est en état de marche au temps  $t = n$ , elle a la probabilité  $p_n$  d'être cassé au temps  $t = n + 1$ .  
 (a) Calculez  $p_1$ .  
 (b) Écrire  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$  (en justifiant votre résultat).  
 (c) En déduire  $p_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Que pensez vous de ce résultat ?

## Exercice 2 - Étude de fonction et suites

On considère l'application définie sur  $]0; +\infty[$ ,  $f : x \mapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}$ .

1. Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , calculer  $f'(x)$ .
2. Établir :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $\ln x + \frac{1}{x} > 0$
3. En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$ . et le sens de variation de  $f$
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ . Calculer  $f(1)$  et  $f'(1)$ .
5. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative  $C$  de  $f$ .
6. Tracer l'allure de  $C$ . On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 2$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

7. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 2$ .
8. Établir, par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq e^n$ .  
 Quelle est la limite de  $u_n$  lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini ?
9. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 10^{20}$ .

### Exercice 3 - Étude de fonctions et suites

On considère la fonction  $f : x \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$ . On définit la suite  $(u_n)$  par

$$u_0 \in [0, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution dans  $[0, 1]$  que l'on notera  $\alpha$ .
2. (a) Montrer que l'intervalle  $[0, 1]$  est stable par  $f$ . (c'est à dire que  $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [0, 1]$  ou encore,  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ .)  
(b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$ .
3. (a) Montrer que  $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$   
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$ .  
(c) Puis que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ .  
(d) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.