A rendre pour le 6 Février 2019

Exercice 1 Polynôme

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 possédant 2 racines réelles α_1 et α_2.

1. En utilisant la forme factorisée du polynôme P, puis en développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha_1 + \alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_2$ en fonction de a,b et c.
2. Réciproquement, soient α_1 et α_2 deux nombres réels. Montrer que α_1 et α_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$ où $s = \alpha_1 + \alpha_2$ et $p = \alpha_1\alpha_2$.

On considère alors l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$

3. Trouver une solution évidente.
4. Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
5. En déduire l'autre solution.

Exercice 2 - Probabilité

On lance n fois une pièce de monnaie donnant " pile " avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et " face " avec la probabilité $q = 1 - p$. On appelle k-chaîne de " pile " une suite de k lancers consécutifs ayant tous donnés " pile ", cette suite devant être précèdée d'un "face" ou débuter le tirage, et suivie d'un " face " ou être la dernière suite du tirage.
Pour tout k de $[\![1, n]\!]$ on note Y_k la variable aléatoire égale au nombre total de k-chaînes de " pile " obtenues au cours des n lancers.
Pour tout k de$[\![1, n]\!]$, on pourra noter P_k l'événement " on obtient " pile " au k^{eme} lancer ".
Par exemple, avec $n = 11$, si l'on a obtenu les résultats $P_1P_2F_3F_4P_5P_6P_7F_8P_9F_{10}P_{11}$ alors $Y_1 = 2$, $Y_2 = 1$ et $Y_3 = 1$.
Le but de cet exercice est de déterminer, pour tout k de $[\![1, n]\!]$ l'espérance de Y_k, notée $E(Y_k)$.

1. Déterminer la loi de Y_n et donner $E(Y_n)$.
2. Montrer que $P(Y_{n-1} = 1) = 2qp^{n-1}$. et donner $E(Y_{n-1})$.
3. Dans cette question, k désigne un entier de$[\![1, n-2]\!]$
   Pour tout i de $[\![1, n]\!]$ on note $X_{i,k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si une k-chaîne de " pile " commence au i^{eme} lancer et qui vaut 0 sinon.
   (a) Calculer $P(X_{1,k} = 1)$.
   (b) Soit $i \in [\![2, n-k]\!]$. Montrer que $P(X_{i,k} = 1) = q^2p^k$.
   (c) Montrer que $P(X_{n-k+1,k} = 1) = qp^k$.
   (d) Exprimer Y_k en fonction des variables $X_{i,k}$, puis déterminer $E(Y_k)$.

Exercice 3 - Suites

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + n\ x.$$

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$.
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n)
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $\lim_{n \to ++\infty} -2n \times u_n = 1$.