A rendre pour le 21 Septembre 2018

Exercice 1

Soit g la fonction définie par $g : x \to \ln(1+x^2)$.

1. Déterminer son ensemble de définition puis son signe.
2. Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer la parité de la fonction g.
4. Dresser alors son tableau de variations.
5. On fixe $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue x, $g(x) = y$ (on distinguera différents cas suivant la valeur de y).
6. En étudiant une fonction annexe, déterminer la position relative de la courbe représentative de g et de la droite d'équation $y = x$.
7. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g en faisant figurer la droite $y = x$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$. (*On admettra pour la suite que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)
3. Dresser le tableau de variation de f sur D en le complétant par les limites de f aux bornes de D.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue x, pour $x \in D$.
5. Montrer que :
$$\forall x \in [e; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$
6. En déduire que :
$$\forall x \in [e; +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Exercice 3

Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$$

Partie 1 : Étude d'une fonction g intermédiaire

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall t \geq 0, \quad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe.
3. En déduire les variations de la fonction g et montrer que : $\forall t \geq 0, \quad g(t) \leq 0$.

Partie 2 : Étude de la fonction f

1. Démontrer que l'on a, pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$.
2. Étudier alors les variations de la fonction f.
3. Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\dfrac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a, pour tout x de l'intervalle $[0;1]$:
$$0 \leq f(x) \leq 1.$$
4. Justifier que pour tout x de $[0,1]$:
$$|f'(x)| \leq |g(e)|.$$

Partie 3 : Étude de la fonction $f(x) - x$

On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.

1. Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$.
2. Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0,1]$.