BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D ADMISSION SIGMA 2018

Concepteur : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 6 Juin, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Une question que se pose un joueur de cartes est de savoir combien de fois il est nécessaire de battre les cartes pour que le paquet soit convenablement mélangé. Ce problème décrit un procédé très élémentaire pour mélanger les cartes et propose de répondre alors à cette question.

Considérons un jeu de N cartes numérotées de C_1 à C_N et disposées en un paquet sur une table. Un joueur bat les cartes et repose le paquet sur la table. Le résultat du mélange est une permutation de ces N cartes.
Notations et Rappel : on note S_N l'ensemble des permutations possibles pour ce paquet de N cartes et on rappelle que $card(S_N) = N!$
On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec $\Omega = S_N$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S_N)$ l'ensemble des parties de S_N et $\mathbf{P}$ l'équiprobabilité sur Ω. Pour toute variable aléatoire X on notera $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X lorsqu'elles existent.

On considère qu'un paquet est convenablement mélangé lorsque toutes les permutations sont équiprobables, c'est-à-dire lorsque pour toute permutation σ de S_N la probabilité que le tas de cartes se trouve dans la configuration σ vaut $1/N!$

Vocabulaire et notations :
Une carte située au sommet de la pile est dite *en position n° 1*, celle qui se trouve immédiatement en dessous est dite *en position n ° 2*, etc. Ainsi une carte située *en position n° N* désigne la carte située en bas de la pile. On prendra garde à bien distinguer la position d'une carte dans le paquet du numéro qu'elle porte.

Partons d'un tas de cartes rangées initialement dans l'ordre suivant : pour tout i élément de $[\![1, N]\!]$, la carte C_i se trouve en position i. Ainsi, à l'instant initial, la carte C_1 se trouve sur le dessus du paquet alors que C_N se trouve donc tout en dessous du paquet.

Pour k élément de $[\![1, N]\!]$, on appelle *insertion* à la k-ième place l'opération qui consiste à prendre la carte située au-dessus du paquet et à l'insérer entre la k-ième et la $(k+1)$-ième place. Une insertion à la première place ne change pas l'ordre des cartes. Une insertion à la N-ième place consiste à faire glisser la carte située au-dessus du paquet pour la mettre sous le paquet.

Le battage par insertions du jeu de cartes consiste à effectuer une suite d'insertions aléatoires, en choisissant, à chaque instant, au hasard uniformément dans $\{l, \cdots, N\}$ la place à laquelle l'insertion a lieu, indépendamment des insertions précédentes. Les instants successifs d'insertions seront notées 1,2, ... n, ... , l'instant initial est $n = 0$.

Notations. Nous notons :
- T_1 le premier instant où la carte située sur le dessus du paquet est glissée en dernière position, c'est-à-dire le premier instant où la carte C_N se trouve remontée de la position N à la position $N-1$,
- T_2 le premier instant où la carte C_N se trouve remontée en position $N-2$,
- et plus généralement, pour i dans $[\![1, N-1]\!]$, T_i le premier instant où la carte C_N atteint la position $N-i$.
- On posera également $\Delta_1 = T_1$ et $\forall i \in [\![2, N-1]\!]$, $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$.
- Enfin, on notera $T = T_{N-1} + 1$.

On admet que les conditions de l'expérience permettent de faire l'hypothèse que les variables aléatoires $(\Delta_i)_{i\in[[1,N-1]]}$ sont indépendantes.

Description d'un exemple. Dans le tableau ci-dessous, nous décrivons les résultats d'une expérience faite
sur un paquet de $N = 4$ cartes. La première ligne du tableau indique les instants n, la deuxième ligne indique
les positions d'insertions , et dans la dernière ligne figure la configuration du paquet à l'instant n.

		instant	n	0	1	2	3	4	5	6	7
	insertion	en place	k		3	2	4	1	3	4	2
Configuration		position	1	C_1	C_2	C_3	C_2	C_2	C_1	C_4	C_2
du		position	2	C_2	C_3	C_2	C_1	C_1	C_4	C_2	C_4
paquet		position	3	C_3	C_1	C_1	C_4	C_4	C_2	C_3	C_3
		position	4	C_4	C_4	C_4	C_3	C_3	C_3	C_1	C_1

Pour cette experience, on a les resultats $T_1(\omega) = 3$, $T_2(\omega) = 5$ et $T_3(\omega) = 6$ et $T(\omega) = 7$.

Partie 1 - Description et premiers résultats

1. Justifier que $\forall i \in [\![2, N-1]\!] \quad T_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_i$.
   Que représente l'intervalle de temps Δ_i ?
2. Déterminer la loi de Δ_1.
3. Soit $i \in [\![2, N-1]\!]$. Loi de Δ_i.
   (a) Établir que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(\Delta_i > n) = \left(\frac{N-i}{N}\right)^n$. En déduire que Δ_i suit une loi usuelle que l'on précisera.
   (b) En déduire $E(\Delta_i) = \dfrac{N}{i}$, et $V(\Delta_i) = N\dfrac{N-i}{i^2}$.
4. Loi de T_2 . Soit $n \geq 2$.
   (a) Démontrer que $\mathbf{P}(T_2 = n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(\Delta_2 = n-k)\, \mathbf{P}(\Delta_1 = k)$
   (b) Justifier que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1-1/N}{1-2/N}\right)^k = N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\left[\left(\dfrac{1-1/N}{1-2/N}\right)^{n-1} - 1\right]$
   (c) En déduire que l'on a : $\mathbf{P}(T_2 = n) = \frac{2}{N}\left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-1}\right]$.
5. À l'instant T_2, la carte C_N est située en position $N-2$ et deux cartes se trouvent sous elle qui ont été insérées aux instants T_1 et T_2.
   Que valent alors les probabilités, qu'à l'instant T_2 :

(a) la carte insérée à l'instant T_1 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_2 en place N ?

(b) la carte insérée à l'instant T_2 soit en place $N-1$ et celle insérée à l'instant T_1 en place N ?

6. À l'instant T_3, la carte C_N est située en position $N-3$ et trois cartes, insérées aux instants T_1, T_2 et T_3, se trouvent sous elle. On note alors, pour $i \in \{1,2,3\}$, a_i la position de la carte ayant été insérée à l'instant T_i.

   (a) Combien y a-t-il de résultats possibles pour le triplet (a_1, a_2, a_3) ?

   (b) Quelques exemples. Donner les probabilités qu'à l'instant T_3 :

      i. on obtienne $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N-1, N)$?

      ii. on obtienne $(a_1, a_2, a_3) = (N-2, N, N-1)$?

7. Justifier la phrase suivante :

   "À partir de l'instant T, toutes les configurations du jeu de cartes sont équiprobables."

   On retiendra que si on arrête le battage des cartes par insertion exactement à l'instant T, on a un paquet convenablement mélangé. Cependant le temps T étant aléatoire, il n'est pas possible d'arrêter de battre les cartes à cet instant précis, à moins de marquer la carte C_N bien sûr !

Partie 2 - Estimation du nombre d'insertions pour bien mélanger les cartes

Notations : on introduit les suites $(H_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \geq 1 \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = H_n - \ln(n)$$

8. Espérance de T
   Justifier que $E(T) = N\ H_N$.

9. Étude de la suite (u_n)

   (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

   (b) En déduire successivement :

      i. la décroissance de la suite (u_n),

      ii. l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.

   (c) Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) est convergente et que sa limite, notée γ appartient à $[0,1]$.

10. Établir que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{E(T)}{N\ln(N)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} \frac{E(T) - N\ln(N) + N\gamma}{N} = 0.$$

   On peut se dire alors que si l'on bat le paquet de carte $N\ln(N)$ fois, on aura un paquet de carte bien mélangé en moyenne. La question que l'on peut se poser est : Est ce que T est proche de sa moyenne, ou au contraire peut s'en éloigner beaucoup ? Il faut alors regarder la variance mais vous ne pourrez le faire qu'en deuxième année.
   Pour information, pour un paquet de 32 cartes, on donne $32\ln(32) \simeq 110$ *et pour un paquet de 52 cartes,* $52\ln(52) \simeq 205$.

11. Simulation informatique. Dans cette question on considère un jeu de $N = 32$ cartes.
   MODÉLISATION : Le paquet de 32 cartes est représenté par une matrice colonne `Jeu` rempli initialement d'entiers entre 1 et 32. Donc, initialement, `Jeu[i]` contient i, c'est à dire que la carte C_i est en position i. Au cours des insertions, `Jeu (i)` désigne le numéro de la carte en position numéro i. Par exemple, `Jeu (i) =10` signifie que la carte C_{10} est en position i.
   On indique à la fin de cette question un extrait de programme à compléter en suivant les questions suivantes :

(a) Compléter la fonction `Insertion` qui simule une opération d'insertion. On rappelle que la fonction `rand()` permet de tirer un nombre réel au hasard entre 0 et 1 et la fonction `floor(x)` donne la partie entière de x.

(b) Que fait la fonction `T` ?

(c) Écrire le programme principal permettant de calculer et d'afficher la moyenne des valeurs prises par la fonction `T` sur 100 expériences.

Extrait du programme.

```
function Jeu2 = insertion(Jeu)
    Jeu2 = zeros(1,32)
    k = ...... \\ position où l'on va insérer la carte du dessus.
    if k>1 then
        for i = 1:k-1
            Jeu2(i) = ..........
        end
    Jeu2(k) = ..........
    end
endfunction

function n = T()
    Jeu = 1:32   \\initialisation du jeu de carte
    n = 0
    while Jeu(1) < 32
        Jeu = insertion(Jeu)
        n = n+1
    end
    n = n+1
endfunction

\\Le programme principal
.......
```

Partie 3 - Distance variationnelle à la loi uniforme

Notations :

— On note π l'équiprobabilité sur $\mathcal{S}_N$, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{P}(\mathcal{S}_N)$ dans $[0,1]$ telle que :

$$\forall A \subset \mathcal{S}_N \quad \pi(A) = \frac{card\,(A)}{N!}\text{ ; en particulier, } \forall \sigma \in \mathcal{S}_N \quad \pi(\{\sigma\}) = \frac{1}{N!}$$

— On note également μ_n la probabilité sur $\mathcal{S}_N$ définie comme suit :
pour chaque configuration σ de $\mathcal{S}_N$, $\mu(\{\sigma\})$ désigne la probabilité qu'à l'instant n le tas de cartes se trouve dans la configuration σ.
On a alors pour pour toute partie A de $\mathcal{S}_N$, $\mu_n(A) = \sum\limits_{\sigma\in A} \mu_n(\sigma)$.
On peut mesurer la qualité du mélange à un instant donné n en estimant l'écart entre μ_n et π. Une
distance d entre ces probabilités est définie de la manière suivante :

$$d(\mu_n, \pi) = \max\{|\mu_n(A) - \pi(A)|,\ A \subset \mathcal{S}_N\}$$

1. Soient A une partie de $\mathcal{S}_N$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'événement : "à l'instant n le paquet de cartes se trouve dans une configuration qui appartient à la partie A."

   (a) Expliquer, en utilisant la question 7, l'égalité suivante : $\mathbf{P}_{(T\leq n)}(E_n) = \pi(A)$.
   En déduire $\mathbf{P}(E_n \cap (T \leq n)) = \pi(A)\,\mathbf{P}(T \leq n)$.

   (b) Établir que $\mathbf{P}(E_n \cap (T > n)) \leq \mathbf{P}(T > n)$.

   (c) Montrer que
   $$\mu_n(A) \leq \pi(A) + \mathbf{P}(T > n)$$

2. Soit A une partie de $\mathcal{S}_N$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

   (a) Exprimer $\mu_n\left(\overline{A}\right) - \pi\left(\overline{A}\right)$ en fonction de $\mu_n(A) - \pi(A)$.

(b) Déduire des questions précédentes la majoration :

$$|\mu_n(A) - \pi(A)| \leq \mathbf{P}(T > n)$$

3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq d(\mu_n, \pi) \leq \mathbf{P}(T > n)$. Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} d(\mu_n, \pi)$.

Partie 4- Une majoration de P$(T\ >\ n)$

Dans cette partie, nous nous intéressons provisoirement à un collectionneur de timbres. Celui-ci reçoit chaque jour une lettre affranchie avec un timbre choisi au hasard uniformément parmi les N timbres en vigueur. On étudie ici le nombre de jours que doit attendre le collectionneur pour posséder la collection complète des N timbres. Le jour 0 il n'a aucun timbre.

On note alors :

— pour tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ S_k le nombre aléatoire de jours que doit attendre le collectionneur pour que le nombre de timbres différents qu'il possède passe de $k-1$ à k,

— $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_N$, soit la variable aléatoire correspondant au nombre de jours à attendre pour posséder la collection complète des N timbres,

— en supposant les N timbres en vigueur numérotés de 1 à N, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, B_j^m l'événement "le jour m, le collectionneur n'a toujours pas reçu de lettre affranchie avec le timbre numéro j."

On admet que les variables aléatoires $(S_k)_{k \in [\![1,N]\!]}$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi de S_1.
2. Déterminer pour tout entier $k \in [\![2, N]\!]$ la loi de la variable S_k.
3. En déduire que la variable S suit la même loi de probabilité que la variable T étudiée dans les parties précédentes.
   Ce résultat sera utilisé pour estimer la quantité $P(T > n)$.
4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Exprimer l'événement $(S > m)$ à l'aide des événements $B_1^m, B_2^m, ..., B_N^m$.
   (b) Que vaut $\mathbf{P}(B_j^m)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$?
   (c) On rappelle que pour tout entier $n \geq 2$ et pour toute famille d'événements $A_{1,}...., A_n$, on a l'inégalité : $\mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$. En déduire $\mathbf{P}(S > m) < N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m$
5. (a) Montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$
   (b) Déduire des résultats précédents la majoration

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(T > m) \leq N e^{-\frac{m}{N}}$$

6. On reprend les notations introduites dans la partie précédente.
   (a) Soit $c > 0$ fixé. Montrer que pour n entier supérieur ou égal à $N \ln N + cN$ on a : $d(\mu_n, \pi) \leq e^{-c}$.
   (b) *Application numérique.* On estime qu'une distance en variation à la loi uniforme de 0,2 est acceptable.
   Avec un jeu de 32 cartes, combien de battages par insertions doit-on faire pour considérer le paquet mélangé de façon acceptable ?

   On donne $32\ ln(5) \approx 51.5$