

# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D ADMISSION SIGMA 2018

Concepteur : EDHEC

---

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 8 Juin, de 8h à 12h

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute **calculatrice** et de tout matériel électronique est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Exercice 1

Les 3 questions sont indépendantes.

1. On considère l'ensemble  $E = \left\{ \begin{pmatrix} 3y + z \\ 2y \\ -z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- (a) Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel.
- (b) Déterminer 2 vecteurs  $u$  et  $v$  tel que  $E = \text{vect}(u, v)$ .
- (c) Montrer que les vecteurs  $u$  et  $v$  forment une famille libre.

2. On considère l'application  $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x - y + z \\ 2x - 2y + 2z \end{pmatrix}$  et on note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

- (a) Montrer que l'application  $f$  est linéaire.
- (b) Déterminer les vecteurs  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$ .
- (c) Déterminer  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ .

3. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  et l'ensemble  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$ .

- (a) Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
- (b) Écrire  $F$  sous la forme  $\text{vect}(u, v)$  avec  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .  
(Indication : Résoudre le système  $AX = 0$ ).

## Exercice 2

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} \forall x > 0, & f(x) = \frac{-x \ln x}{1 + x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.
  - (a) Vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
  - (b) Etudier le signe de  $f(x)$ .
2. Montrer que l'on définit bien une fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}^+$ , en posant:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

3. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$ , on pose :  $g(x) = F(x) - x$ .
  - (a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et que, pour  $x > 0$ , on peut écrire  $g'(x)$  sous la forme

$$g'(x) = \frac{-xh(x)}{1 + x^2}$$

- (b) Etudier les variations de  $h$ , puis en déduire son signe (on donne  $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq -0,48$ ).
  - (c) En déduire le signe de  $g(x)$ .
4. On définit la suite  $(u_n)$  par la donnée de son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence, valable pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = F(u_n)$ 
  - (a) Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que  $(u_n)$  est décroissante.
  - (b) Etablir par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0, 1]$ .
  - (c) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et donner  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## Exercice 3

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance  $n$  fois une pièce équilibrée (cest-à-dire donnant pile avec la probabilité  $1/2$  et face également avec la probabilité  $1/2$ ), les lancers étant supposés indépendants.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces  $n$  lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. (a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble  $Z(\Omega)$
- (b) Pour tout  $k$  de  $Z(\Omega)$ , calculer  $P(Z = k)$ . On distinguera les cas  $k = 0$  et  $k \geq 1$ .
- (c) Vérifier que  $\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$ .
- (d) On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'uin',0,1)` renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier  $n$  étant entré au clavier par l'utilisateur (pile sera codé par le nombre 1 et face par 0).

```
n = input("Entrez le nombre de lancer")
k = 0
z = 0
while (z == 0) & (.....)
    k = k+1
    lancer = grand(1,1,'uin', 0,1)
    if lancer == .....
        then .....
    end
end
```

On dispose de  $n + 1$  urnes  $U_0, U_1, \dots, U_n$  telles que pour tout  $k$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$  l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable  $Z$  prend la valeur  $k$  (avec  $k \geq 1$ ), alors on tire une par une et avec remise,  $k$  boules dans l'urne  $U_k$  et l'on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable  $Z$  a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et  $X$  prend la valeur 0.

2. Déterminer  $X(\Omega)$ .
3. (a) Déterminer, en distinguant les cas  $i = 0$  et  $1 \leq i \leq n$ , la probabilité  $P_{Z=0}(X = i)$ .
- (b) Déterminer, en distinguant les cas  $i = n$  et  $0 \leq i \leq n-1$ , la probabilité  $P_{Z=n}(X = i)$ .
- (c) Pour tout  $k$  de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  déterminer, en distinguant les cas  $0 \leq i \leq k$  et  $k < i \leq n$ , la probabilité conditionnelle  $P_{Z=k}(X = i)$ .

4. (a) Montrer que  $P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$

(b) Montrer que  $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$

(c) Exprimer, pour tout  $i$  de  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $P(X = i)$  sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que  $\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$ .

## Problème

Dans ce problème  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que  $A_n^k$  désigne le nombre d'arrangements de  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments et  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

### Partie I

On effectue  $2n$  tirages au hasard dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant remise dans l'urne.

On note  $N$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Montrer que  $N(\Omega) = \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ .
2. Montrer que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(N > k) = \frac{A_n^k}{n^k}$
3. (a) Montrer que :  $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, p(N = k) = p(N > k-1) - p(N > k)$ .  
(b) Calculer  $p(N = n+1)$  puis en déduire la loi de  $N$ .
4. Montrer que l'espérance  $E(N)$  de la variable aléatoire  $N$  est :  $E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}$

### Partie II

Soit  $X$  une variable aléatoire, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , de densité  $f$  (nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ ) et de fonction de répartition  $F$ . On suppose, de plus,  $f$  continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

On pose, pour tout réel  $x$  positif,  $\varphi(x) = \int_0^x t f(t) dt$ .

1. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)] dt - x \cdot P(X > x)$$

2. On suppose, dans cette question, que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt$  converge.
  - (a) Calculer  $\varphi'(x)$  et en déduire que la fonction  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
  - (b) Montrer que  $\varphi$  est majorée et en déduire que  $X$  a une espérance.
  - (c) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq x \cdot P(X > x) \leq \int_x^{+\infty} t f(t) dt$
  - (d) En utilisant le fait que  $X$  a une espérance, montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} t f(t) dt = 0$   
En déduire  $\lim_{x \rightarrow \infty} x P(X > x)$ , puis montrer que :  $E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)] dt$

### Partie III

On considère la fonction  $F_n$  définie par : 
$$\begin{cases} F_n(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_n(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $F_n$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité  $T_n$ .
2. (a) Montrer par intégration par partie que, pour tout  $A > 0$ , pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\int_0^A x^{k+1} e^{-x} dx = -(k+1)A^k e^{-A} + (k+1) \int_0^A x^k e^{-x} dx.$$

- (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $k$ , l'intégrale  $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$  converge.
- (c) Montrer que  $I_{k+1} = (k+1) I_k$  puis donner la valeur de  $I_k$ .
3. En déduire, en utilisant la partie II, que  $T_n$  a une espérance et que  $E(T_n) = E(N)$ .

## Partie VI

On considère la fonction suivante, rédigée en Scilab :

```
function y= f(p,q)
  if (p<= 0) | (q<0) then
    disp('Valeurs incorrectes')
  else
    z = 1
    for j = 1:q-1
      z = z*(1-j/p)
    end
  end
  y = z
endfunction
```

1. Montrer que si  $p$  est un entier naturel non nul et si  $q$  est un entier naturel alors

$$f(p, q) = \frac{A_p^q}{p^q}.$$

2. Utiliser cette fonction pour écrire un algorithme en Scilab donnant la valeur commune de  $E(N)$  et  $E(T_n)$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$  au clavier.