BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D ADMISSION SIGMA 2018

Concepteur : EMLYON

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 Juin, de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute ***calculatrice*** *et de tout matériel électronique est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre 3 réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Écrire sous forme d'un système l'égalité matricielle $(A - \lambda I)X = 0$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que le système précédent est de Cramer sauf pour un réel λ que l'on déterminera.

   (c) A est-elle inversible ?

(d) Existe-t-il une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$? (On pourra raisonner par l'absurde).

2. On note $B = A - 3I$,

   (a) Calculer B^2.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice2

Soit $f : \begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

   (b) Étudier les variations de f', puis celles de f.

   (c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.

3. On suppose dans cette question : $u_0 \in \,]e-1;+\infty[$.

   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.

   (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On suppose, dans cette question : $u_0 \in \,]0;e-1[$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Sous diverses hypothèses, l'exercice étudie différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre.Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1.

On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement “l'objet provient de la chaîne A“ .

2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

   On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

(a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

(b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Y=n)}(X=k)$. (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

(c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $(Y=i)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Partie 2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z
2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
3. Justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$$

La calculer en effectuant le changement de variable $u = t+1$.

4. Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.
5. Dans cette partie, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes d'un pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 etZ_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que que Z.

(a) On considère les événements :
$C =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaine B est supérieur à 2 minutes".
$D =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est inférieur à 3 minutes".
Calculer les probabilités suivante : $P(C), P(D), P_C(D)$.

(b) On note $T = \max(Z_1, Z_2)$ et G_T la fonction de répartition de T.

i. Exprimer l'événement $(T \leq x)$ en fonction des événements $(Z_1 \leq x)$ et $(Z_2 \leq x)$

ii. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_T(x) = [F_Z(x)]^2$$

(c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Partie 3.
On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant une loi exponentielle de paramètre 2.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Les variables M et N sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité v de M et d'une densité w de N.
2. On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce.

Exprimer S en fonction de M et de N et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.

Exercice 4

On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 2 :
$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :
$$I_n = \int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

   (b) On définit la fonction
$$F : \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right). \end{array}$$
   Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}.$$
   (a) Montrer que $\forall k \in [\![2;n]\!]$
$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2-1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$
   (b) En déduire que : $I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\ln(n)} = 1$.