Durée: 4 heures Mercredi 9 Mai 2018

Aucune sortie (même temporaire) autorisée pendant la première heures et le dernier quart d'heure

DS n°5

Aucun matériel ni documents autorisés. La présentation de la copie compte pour environ un point sur 20. Écrivez dans un Français clair et précis. Encadrez les résultats.

Les 3 exercices sont indépendants. Le sujet comporte

Exercice 1A - ECRICOME ECT - 2013

Dans cet exercice, on étudie quelques situations probabilistes liés à un standard téléphonique d'un service après-vente. Le standard de ce service après-vente reçoit deux types d'appels : Les appels concernant le petit électroménager et les appels concernant les appareils audio et vidéo.
Lors d'un appel, le problème est soit résolu directement par téléphone, soit il nécessite l'intervention d'un technicien. On considère les événements suivants :

- E : " un appel concerne le petit électroménager "
- A : " un appel concerne les appareils audio et vidéo"
- T : " le problème se résout directement par téléphone "

De plus des études ont permis d'établir les résultats suivants :

(H_1) Le standard reçoit 20 % d'appels concernant le petit électroménager et 80 % d'appels concernant les appareils audio et vidéo.

(H_2) Lorsqu'un appel concerne le petit électroménager, la probabiité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,5$.

(H_3) Lorsqu'un appel concerne un appareil audio et vidéo, la probabiité pour que le problème soit résolu par téléphone est de $0,375$.

On supposera enfin les appels indépendants les uns des autres.

PARTIE I

1. (a) Traduire en terme de probabilité les données (H_1), (H_2) et (H_3).

   (b) Montrer que $P(T) = 0,4$

   (c) On suppose qu'une personne appelant le standard a vu son problème résolu directement par téléphone, calculer la probabilité pour que le problème posé concerne un petit électroménager.

2. Un standardiste reçoit 10 appels dans l'heure, on note X la variable aléatoire représentant le nombre d'appels concernant le petit électromé nager.

   (a) Déterminer la loi de X : on donnera les valeurs prises par X ainsi que, pour chacune d'elles, la probabilité correspondante.

   (b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

3. Pendant une période de 10 jours, un standardiste reçoit 600 appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'appels résolus directement par téléphone.

   (a) Donner la loi de Y.

   (b) On admet dans la suite de cette partie que l'on peut approcher la loi de Y par une loi normale.Déterminer les paramètres de cette loi.

   (c) En utilisant cette approximation, déterminer une valeur approchée de la probabilité $P(Y \leqslant 252)$.
   (*On utilisera la table de loi normale ci-jointe)*

PARTIE II.

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale impropre $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A xe^{-x} dx$. est convergente et donner sa valeur.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire.
3. On suppose que lors d'un appel au standard, le temps de celui-ci en minutes est une variable aléatoire M à densité dont une densité est f..
   (a) Déterminer F la fonction de ré partition de la variable M.
   (b) Calculer les probabilités suivantes : $P(M \leqslant 4)$, $P(2 \leqslant M \leqslant 4)$, $P_{(M \geqslant 2)}(M \leqslant 4)$
4. Montrer que la variable aléatoire M admet une espérance et que cette espérance vaut 2.
5. On suppose que le prix payé par le client en euro pour un appel est une variable aléatoire Z qui est calculée de la façon suivante : $Z = 1 + 0,2\ M$. Quel est le coût moyen d'un appel pour un client ?

Exercice 2A - ECRICOME ECT - 2013

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

I. Probabilités conditionnelles

On admet que 5 % des appareils présentent un défaut. On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90 % des appareils avec défaut et accepte 80% des appareils sans défaut. On prélève un appareil au hasard dans le lot.

On considère les évènements suivants :

- D : " L'appareil a un défaut".
- A : " L'appareil est accepté à l'issue du contrôle".

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :
$$P(D), \quad P(\bar{D}), \quad P_D(\bar{A}), \quad P_D(A), \quad P_{\bar{D}}(A)$$
2. Calculer à $0,001$ près les probabilités suivantes :
$$P(A \cap D), \quad P(A \cap \bar{D})$$
3. En déduire la probabilité de $P(A)$ à 0,001 près.
4. Calculer à 0,001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

II. Loi discrète

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils sans défaut de ce prélèvement.

1. Déterminer $X(\Omega)$, la loi de X, son espérance et pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X = k)$.
2. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.
3. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

III.Une variable à densité

On considère la fonction f de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La durée de vie des appareils électriques, exprimée en centaine d'heures, est une variable aléatoire à densité notée T, dont une densité est la fonction f.

La probabilité qu'un appareil électrique fonctionne au moins jusqu'à la date x est donc donnée par la probabilité de l'évènement $(T > x)$

On note F la fonction de répartition de T.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = (1 - e^{-x})^2$.
3. Calculer la durée médiane de fonctionnement des appareils, c'est-à-dire le temps x tel que $F(x) = \dfrac{1}{2}$.
4. Déterminer la durée moyenne de fonctionnement des appareils, c'est-à-dire $E(T)$.

Exercice 3A - ECRICOME 2007

Soucieux de mieux connaitre sa clientèle, un gérant de magasin a réalisé une étude : Après enquête, on estime que le temps d'attente en caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On suppose que les temps d'attente successifs d'une même personne lors des différents passages en caisse sont indépendants.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. On note F_T la fonction de répartition de la variable T. Déterminer F_T.

3. Vérifier que la probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à quatre unités (de temps) est égale à $\dfrac{1}{25}$.
4. Quelle est la probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à cinq unités sachant qu'il est supérieur à quatre unités ?
5. Pendant 125 jours une même personne se présente à la caisse. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de fois où ? cette personne attend plus de quatre unités à la caisse.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.
6. Plus impatient, un autre client décide de passer à la concurrence le jour où il attend plus de quatre unités à la caisse. On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où ce client s'est présenté à la caisse de ce magasin avant de passer à la concurrence, si cet évènement se produit.
   (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

Exercice 1B - EDHEC 2005

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0,1[\\ 0 & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$
   (a) Pour tout x de $[0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ est une intégrale convergente et donner sa valeur.
   (c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.
2. Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

3. (a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x
   (b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.
4. (a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$.
   (b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.
   (c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.
   (d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $E\left(e^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$
   En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

Exercice 2B - EML 2007

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

   - ⋆ l'événement $(Y = 0)$ est égal l'événement $(X < 1)$
   - ⋆ pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $(Y = n)$ est égal à l'événement $(n \leqslant X < n+1)$.

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) e^{-n}$

   (b) Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.

   (c) Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y

```
u = rand()
y = ............
    while .......... do
    ...................
    end
disp(y, 'y vaut')
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$.

   On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.

   Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.

   Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

   (a) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$

   (b) Vérifier que $T^2 = Y^2$

   En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$

   (c) Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.

   (a) Justifier : $\forall t \in]-\infty; 0[\,,\ F_D(t) = 0$ et : $\forall t \in [1; +\infty[\,,\ F_D(t) = 1$.

   (b) Soit $t \in [0; 1[$. Exprimer l'événement $(D \leqslant t)$ à l'aide des événements $(n \leqslant X \leqslant n + t)$, $n \in \mathbb{N}$

   (c) Pour tout nombre réel $t \in [0; 1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(n \leqslant X \leqslant n + t)$.

   (d) Montrer : $\forall t \in [0; 1[\,,\ F_D(t) = \dfrac{1 - e^{-t}}{1 - e^{-1}}$

   (e) Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.

Exercice 3B - ECRICOME 2009

Liminaire.

Soient x un réel dans l'intervalle $[0,1[$, n un entier naturel non nul et S_n la fonction définie par :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k$$

1. Calculer la somme $S_n(x)$.

2. Dériver l'égalité obtenue et montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés au transport.

Partie 1.

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p=0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.

2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?

3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en annexe).

4. Monsieur Thierex fréquente cette ligne de bus tous les jours pendant 10 jours. On suppose que les retards journaliers sont indépendants.

   (a) On désigne par Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de jours où Monsieur Thierex a attendu moins de 7 minutes.
   Déterminer la loi de Y, donner sans calcul, son espérance et sa variance.

   (b) On définit par Z la variable aléatoire discrète réelle indiquant le rang k du jour où pour la première fois Monsieur Thierex attend plus de 7 minutes si cet événement se produit. Dans le cas contraire si le temps d'attente est inférieur à 7 minutes pendant les dix jours, Z prend la valeur 0.
   Déterminer en fonction de p la probabilité des événements $[Z=0]$, puis $[Z=k]$ pour $1\leqslant k\leqslant 10$.
   Utiliser le liminaire pour calculer l'espérance de Z en fonction de p.

5. Lassé des retards de son bus, Monsieur Thurman décide de prendre le bus ou le métro selon le protocole suivant :

   - Le premier jour, il prend le bus.
   - Si le jour n ($n\in\mathbb{N}^*$) il attend plus de 7 minutes pour prendre le bus, le jour $n+1$ il prend le métro, sinon il prend de nouveau le bus.

- Si le jour n il prend le métro, le jour $n+1$ il prend le métro ou le bus de façon équiprobable.

On note p_n la probabilité de l'événement $A_n =$" Monsieur Thurman prend le bus le jour n"

(a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \left(p - \frac{1}{2}\right) p_n + \frac{1}{2}$$

(b) Soit α le réel vérifiant :

$$\alpha = \left(p - \frac{1}{2}\right) \alpha + \frac{1}{2}$$

Déterminer α en fonction de p, puis montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - \alpha) + \alpha$$

(c) La suite (p_n) est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?

Partie 2.

1. Le nombre d'appels reçus par le standard d'une société de taxis pendant une période de durée t suit une loi de Poisson Y_t de paramètre λt, λ étant une constante strictement positive. Une origine de temps étant choisie, on note T la variable aléatoire réelle représentant le temps d'attente du premier appel vers ce standard. Par convention $\mathrm{P}(T \leqslant t) = 0$ pour $t < 0$.

   (a) Pour tout entier naturel k, rappeler la valeur de la probabilité de l'événement $[Yt = k]$, ainsi que l'espérance et la variance de Y_t.

   (b) Que peut-on dire des événements $[Y_t = 0]]$ et $[T > t]$ pour $t > 0$. En déduire la probabilité des événements $[T > t]$ et $[T \leqslant t]]$ pour $t > 0$.

   (c) Expliciter la fonction de répartition F_T de T. Reconnaître la loi de T et donner son espérance et sa variance.

2. La durée, exprimée en heures, du transport d'un client par la société est une variable aléatoire U à densité dont une densité est donnée par :

$$\begin{cases} g(t) = t\, e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   (a) Vérifier que g est bien une densité de probabilité.

   (b) Montrer que U admet une espérance que l'on déterminera. Que représente cette espérance ?

Table

La table ci-dessous comporte les valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, à savoir les valeurs de :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

par exemple $\Phi(0,67) = 0,7486$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Exercice 1C - ECRICOME 2011

Un système est constitué de n composants. On suppose que les variables aléatoires $T_1, T_2, \dots, T_n$ mesurant le temps de bon fonctionnement de chacun des n composants sont indépendantes, de même loi, la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calcul du nombre moyen de composants défaillants entre les instants 0 et t.

On note N_t la variable aléatoire égale au nombre de composants défaillants entre les instants 0 et t avec $t \geqslant 0$.

1. Pour tous les entiers i de $\{1, 2, \dots, n\}$, calculer la probabilité de l'événement $\{T_i < t\}$.
2. Montrer que N_t suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres et son espérance $E(N_t)$.
3. À partir de quel instant t_0 le nombre moyen de composants défaillants dépasse-t-il la moitié du nombre de composants ?

2. Montage en série.

On suppose que le système fonctionne correctement si tous les composants eux-mêmes fonctionnent correctement et note S_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer l'événement $\{S_n > t\}$ en fonction des événements :

$$\{T_1 > t\},\ \{T_2 > t\},\ \dots\ \{T_n > t\}.$$

2. Déterminer alors la fonction de répartition F_n, de S_n, puis définir sa densité f_n.
3. Reconnaître la loi de S_n et donner sans calcul l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$ de S_n.

3. Montage en parallèle.

On suppose maintenant que le système fonctionne correctement si l'un au moins des composants fonctionne correctement et note U_n la variable aléatoire mesurant le temps de bon fonctionnement du système.

1. Exprimer $\{U_n < t\}$ en fonction des événements $\{T_1 < t\}$, $\{T_2 < t\}$, $\ldots$ $\{T_n < t\}$.
2. Déterminer alors la fonction de répartition G_n de U_n puis montrer que sa densité g_n est définie par :

$$\begin{cases} g_n(t) = n\lambda\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n-1} e^{-\lambda t}, & t \geqslant 0 \\ g_n(t) = 0, & t < 0 \end{cases}$$

3. Montrer l'existence de l'espérance $E(U_n)$ de U_n et prouver que :

$$E(U_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} C_n^{k+1}$$

puis, que pour tous entiers naturels n,

$$E(U_{n+1}) - E(U_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

4. (Bonus) Par sommation de la relation précédente, et en utilisant l'équivalent simple :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

donner un équivalent simple de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2C - ESSEC 2004

On considère une urne composée de boules blanches et de boules rouges, mais dont la composition exacte est inconnue. Supposons qu'après avoir effectué n tirages au hasard avec remise dans cette urne, soit obtenu un total de r boules rouges. Il semble alors raisonnable de penser que la proportion initiale de boules rouges est proche de $\frac{r}{n}$.
Le problème qui suit propose une étude de cette situation.

I. Etude d'une loi de probabilité conditionnelle

Dans cette partie, N, n et r désignent des entiers tels que : $N \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant r \leqslant n$.
On considère $N+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_N$ telles que, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, l'urne U_k soit composée de k boule(s) rouge(s) et de $N-k$ boule(s) blanche(s). On choisit une urne au hasard dans laquelle on effectue alors n tirages successifs avec remise de la boule dans cette même urne. On note U la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.

1. (a) Soit k un entier compris au sens large entre 0 et N.
   Quelle est la loi de R conditionnée par l'événement $(U = k)$?

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'égalité :

$$P(R = r) = \frac{\binom{n}{r}}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-r}.$$

2. Soit i un entier compris au sens large entre 0 et N.
   Démontrer :
$$P_{R=r}(U=i)=\frac{\left(\frac{i}{N}\right)^r\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^r\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-r}}.$$

3. Soient p un réel de $[0\,;\,1]$ tel que pN soit un entier naturel et Y_N la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges dans l'urne choisie initialement parmi les $N+1$ urnes.

   (a) Écrire l'événement $(Y_N \leqslant p)$ à l'aide de la variable aléatoire U.
   Déterminer alors l'expression de $P(Y_N \leqslant p/R=r)$ en fonction de N, n, r et p.

   (b) En déduire, à l'aide du théorème sur les sommes de Riemann :
$$\lim_{\substack{N\to+\infty\\ pN \text{ entier naturel}}} P_{R=r}(Y_n \leqslant p)=\frac{\int_0^p t^r(1-t)^{n-r}dt}{\int_0^1 t^r(1-t)^{n-r}dt}$$

II. Loi de probabilité bêta

Dans toute cette partie, a et b désignent des réels supérieurs ou égaux à 1.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$. On notera dorénavant $B(a,b)$cette intégrale.

2. (a) • Démontrer l'égalité :$B(a+1,b)+B(a,b+1)=B(a,b)$.
   • A l'aide d'une intégration par parties, prouver : $B(a,b+1)=\dfrac{b}{a}B(a+1,b)$.
   • Des deux relations précédentes, déduire la formule : $B(a+1,b)=\dfrac{a}{a+b}B(a,b)$.

   (b) Calculer $B\,(1,\,b)$, puis exprimer explicitement $B(a,b)$ en fonction de a et b dans le cas où a et b sont entiers.

   (c) Écrire un programme en langage Pascal permettant de calculer et d'afficher la valeur de $B(a,b)$, les entiers naturels non nuls a et b étant saisis au clavier par l'utilisateur.

3. On revient au cas général où a et b sont des réels supérieurs ou égaux à 1, non nécessairement entiers. C désignant un nombre réel, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x)=Cx^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } 0<x<1\\ f(x)=0 & \text{si } x\leqslant 0 \text{ ou } x\geqslant 1.\end{cases}$$

   (a) Démontrer que, pour une certaine valeur de la constante C à déterminer, la fonction f est une densité de probabilité
   (c'est à dire $\int_{-\infty}^{+\infty} f=1$). On supposera dorénavant C ainsi fixée.
   On dit alors qu'une variable aléatoire de densité f suit la loi de probabilité bêta de paramètres a et b.

   (b) • Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0,\,1[$.
   Justifier que, si a et b sont distincts de 1, alors, sur $]0,\,1[$, f' s'annule en un réel et un seul.
   • Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 en discutant selon la valeur de a.

- Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans chacun des deux cas

$$\begin{cases} 1 < a < 2 \\ b > 2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a > 2 \\ b = 2. \end{cases}$$

(c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé et admettant pour densité f.

- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
- Démontrer que X admet une variance égale à $\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

Exercice 3C - HEC 2004

1. **Étude d'une suite et programmation**
   On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

   (a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite décroissante de réels positifs.

   (b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$

   (c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

   En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

   (d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$$

   (e) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

2. **Étude d'une suite de variables aléatoires à densité**
   Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n(1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

   (a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,du$$

(b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

(c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

(d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1.
En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2}$ Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

(e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1.$$

(f) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ?