

Durée: 4 heures

Lundi 12 Mars 2018

**Aucune sortie (même temporaire) autorisée pendant la première heures et le dernier quart d'heure**

## DS n°5

Aucun matériel ni documents autorisés. N'oubliez pas vos objectifs personnels. Relisez vos réponses et encadrez vos résultats. Le sujet comporte 6 pages !

La présentation de la copie compte pour environ un point sur 20. Écrivez dans un Français clair et précis. Encadrez les résultats.

Rappel des règles: Ce sujet est double. Vous devez à chaque fois choisir entre 2 exercices, c'est à dire que vous **ne devez pas** faire deux exercices portant le même numéro (le second exercice ne sera pas corrigé). Enfin, chaque exercice possède un niveau de difficulté (\*, \*\*, \*\*\*). Les exercices plus difficiles seront notés sur plus de points. Selon vos résultats lors du précédent SIGMA, vous devez choisir des exercices pour un nombre **minimum** d'étoiles. Voici un récapitulatif des exercices :

- Exercice 1 - Calculs obligatoires pour tout le monde
- Exercice 2A - Probabilité - (\*) ou Exercice 2B - Probabilité - (\*\*)
- Exercice 3A - Fonctions et suites - (\*) ou Exercice 3B - Fonctions et suite - (\*\*)
- Exercice 4A - Probabilités - (\*\*) ou Exercice 4B - Probabilités - (\*\*\*)

Rappel du nombre d'étoiles minimum à choisir par élève :

7 * minimum	Corentin et Bela
6 * minimum	Ugo, Martin, Adrien, Mathilde G., Arnaud, Lola
5 * minimum	Justine, Illona, Zacharie, Mathilde C., Flora,
4* minimum	Les autres

## Exercice 1 - Calculs - Exercice Obligatoire

1. On considère une variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = a \frac{2^k}{3^{2k+1}}$$

- (a) Déterminer  $a$  pour que la loi de  $X$  soit bien une loi de probabilité.  
 (b) Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer la.  
 (c) Montrer que  $X$  admet une variance et calculer la.

2. Montrer que la matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible.

3. On considère le système  $(E_\lambda) : \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ 2x - (1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- (a) Pour quelles valeurs de  $\lambda$ , le système  $(E_\lambda)$  est-il de Cramer ?  
 (b) Résoudre le système selon les valeurs de  $\lambda$ .

## Exercice 2A - Probabilités (ECRICOME ECT 2017) - (\*)

### Partie I : tirages dans une urne

Une urne  $\mathcal{U}$  contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans  $\mathcal{U}$ . On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
- (a) Quelle est la loi de  $X$  ?  
 On précisera  $X(\Omega)$  et  $P(X = k)$  pour tout  $k \in X(\Omega)$ .
- (b) Donner la valeur de l'espérance de  $X$  notée  $E(X)$  et vérifier que la variance de  $X$ , notée  $V(X)$  est égale à 75.
2. On procède cette fois-ci dans  $\mathcal{U}$  à une suite de tirages avec remise d'une boule jusqu'à obtenir la boule noire. On appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
- (a) Quelle est la loi de  $Y$  ?  
 On précisera  $Y(\Omega)$  et  $P(Y = k)$  pour tout  $k \in Y(\Omega)$ .
- (b) Donner la valeur de  $E(Y)$  et vérifier que  $V(Y) = 12$ .
3. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne  $\mathcal{U}$  successivement et sans remise les quatre boules. On note  $Z$  le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
- (a) Quelle est la loi de  $Z$  ?  
 On précisera  $Z(\Omega)$  et  $P(Z = k)$  pour tout  $k \in Z(\Omega)$ .
- (b) Donner les valeurs de  $E(Z)$  et de  $V(Z)$ .

### Exercice 3A - Fonctions et suites (ECRICOME ECT 2014) - (\*)

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par:

$$\forall x \in ]0, +\infty[ , \quad f(x) = 2 - \frac{1}{2} \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer les limites suivantes:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
2. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  puis dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. Prouver que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $]0, +\infty[$ .

On la note  $\alpha$ .

4. Justifier que:

$$\alpha \in [1, e] \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha.$$

5. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ . Préciser la monotonie de la fonction  $f$ .

6. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq e.$$

7. Vérifier que:

$$\forall x \in [1, e], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

8. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2^n}.$$

9. Prouver que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

### Exercice 4A - Probabilités (ECRICOME ECT 2012) - (\*)

On considère deux urnes notées respectivement  $U$  et  $V$ . On suppose que :

- l'urne  $U$  contient deux boules noires et deux boules blanches;
- l'urne  $V$  contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante ( $\mathcal{E}$ ) : on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne  $U$ , on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne  $U$ .

(a) Montrer que la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est  $p = \frac{1}{3}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On répète  $n$  fois l'expérience ( $\mathcal{E}$ ) et on note  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces  $n$  tirages dans l'urne  $U$ .

(b) Donner la loi de  $N$  en explicitant  $P(N = k)$  pour  $k$  appartenant aux valeurs prises par  $N$ .

- (c) Préciser la valeur de l'espérance  $E(N)$  de  $N$  ainsi que de sa variance  $V(N)$ .
- (d) Quelle est la probabilité que, sur ces  $n$  tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?
2. On considère une autre expérience ( $\mathcal{F}$ ) : on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne  $U$ . Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne  $U$ . Si elles ont des couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne  $U$  puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne  $U$  soit vide. On note  $X$  le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne  $U$  soit vide.

On désigne par  $A$  l'événement : " au premier tirage dans l'urne  $U$ , les deux boules sont de même couleur " et on note  $a$  sa probabilité, c'est-à-dire  $a = P(A)$ .

- (a) Calculer  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  et  $P(X = 3)$ .
- (b) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$  :  $P(X = n) = a(1 - a)^{n-2}$ .
- (c) Établir que la variable  $Z = X - 1$  suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
- (d) Donner l'espérance et la variance de  $Z$  puis l'espérance et la variance de  $X$ .
3. On considère deux réels  $r, s$  distincts et non nuls ainsi qu'un réel  $\lambda$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par :

$$u_2 = 0, \quad \forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r - s} (r^{n-2} - s^{n-2})$$

4. On considère une nouvelle expérience ( $\mathcal{G}$ ) : on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne  $V$ . Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne  $V$ . Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne  $V$  puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne  $V$  soit vide. On note  $Y$  le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne  $V$  soit vide.

On désigne par  $B$  l'événement : au premier tirage dans l'urne  $V$ , les deux boules sont de même couleur et on note  $b$  sa probabilité, c'est-à-dire  $b = P(B)$ .

- (a) Calculer la probabilité  $b$ .
- (b) Calculer  $P(Y = 2)$  et  $P(Y = 3)$ .
- (c) À l'aide du système complet d'événements  $(B, \overline{B})$ , démontrer que, pour tout  $n \geq 2$  :

$$P(Y = n + 1) = bP(X = n) + (1 - b)P(Y = n)$$

- (d) À l'aide de la question 3, montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad P(Y = n) = \frac{ab}{b - a} ((1 - a)^{n-2} - (1 - b)^{n-2})$$

- (e) Calculer la valeur de  $\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y = n)$ .

- (f) Montrer que  $Y$  admet une espérance puis calculer  $E(Y)$ .

## Exercice 2B - Probabilités (INSEECOM 2002) - (\*)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12. Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la  $n^{\text{ième}}$  partie,  $n \geq 1$ , il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la  $n^{\text{ième}}$  partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$  : " le joueur gagne la  $n^{\text{ième}}$  partie".

(a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{A_n}(A_{n+1})$  et  $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ , en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$$

(b) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$

2. Soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $B_k$  l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des  $n$  premières parties et ce gain a lieu à la  $k^{\text{ième}}$  partie"

(a) A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer  $p(B_n)$

(b) Soit  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , calculer  $p(B_k)$

(c) En déduire la probabilité  $q_n$  pour que le joueur gagne une seule fois au cours des  $n$  premières parties.

## Exercice 3B - Fonctions et Suites (ECRICOME 2007) - (\*)

Soit  $a$  un réel strictement positif. On considère la fonction  $f_a$  définie pour tout réel  $t$  strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{a^2}{t} \right)$$

ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombre réels déterminée par son premier terme  $u_0 > 0$  et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

### Etude des variations de la fonction $f_a$ .

1. Déterminer la limite de  $f_a(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et donner la position de la courbe représentative de  $f_a$  par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de  $f_a(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de  $f_a$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et dresser le tableau de variation de  $f_a$ .
4. En déduire que :

$$\forall t > 0 \quad f_a(t) \geq a$$

## Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Que dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas particulier où  $u_0 = a$ ?

2. Dans la suite on revient au cas général  $u_0 > 0$ .

Démontrer que :

$$\forall t > a \quad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier  $n$ , non nul :

$$u_n \geq a$$

4. Prouver alors que pour tout entier  $n$  non nul :

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$  et indiquer sa limite.

6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Scilab permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite  $(u_n)$ , de premier terme 1, convergeant vers  $\sqrt{2}$ .

## Exercice 4B - Probabilités - ECRICOME 2013 (\*\*\*)

Dans tout cet exercice,  $N$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes opaques  $U_1$  et  $U_2$ , d'apparence identique et contenant chacune  $N$  boules indiscernables au toucher.

L'urne  $U_1$  contient  $(N - 1)$  boules blanches et une boule noire.

L'urne  $U_2$  contient  $N$  boules blanches.

### I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne  $U_1$ , jusqu'à l'obtention de la boule noire.

On note  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.

On notera pour tout entier naturel  $i$  non nul :

- $N_i$  l'événement " on tire une boule noire lors du  $i$ -ième tirage ".
- $B_i$  l'événement " on tire une boule blanche lors du  $i$ -ième tirage ".

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.

Recopier et compléter le programme SCILAB suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

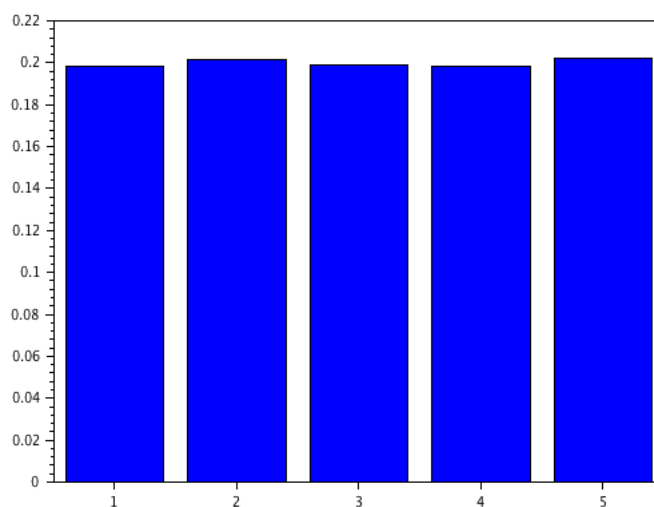
```
N = input(' Donner un entier naturel non nul ');
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
i = 1 ;
M = N ;
```

```

while _____
i = i + 1 ;
M = _____ ;
end
S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)

```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire  $X$  ?

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où  $N \geq 3$ .

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  et  $P(X = 3)$ .
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X$ .
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

## II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.

On note  $Y$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.

On note :

- $C_1$  l'événement " on choisit l'urne  $U_1$  ".
- $C_2$  l'événement " on choisit l'urne  $U_2$  ".

1. Montrer que pour tout entier  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$P_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

2. Calculer  $P_{C_2}(Y = j)$  pour tout entier  $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .  
(On distinguera les cas  $j = N$  et  $1 \leq j \leq N - 1$ ).

3. Montrer que :

$$P(Y = j) = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$

4. Calculer l'espérance de  $Y$ .

### III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne  $U_1$ . On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.

On note  $T$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

On note  $U$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire, . . . , alors  $T = 4$  et  $U = 1$ .

1. Préciser les valeurs prises par  $T$ .
2. Montrer soigneusement que pour tout entier  $k \geq 2$ ,

$$P(T = k) = \frac{1}{N} \left( \frac{N-1}{N} \right)^{k-1} + \frac{N-1}{N} \left( \frac{1}{N} \right)^{k-1}.$$

3. Montrer que la variable aléatoire  $T$  admet une espérance que l'on calculera.

4. (a) Calculer  $P([U = 1] \cap [T = 2])$ .  
(b) Calculer  $P([U = 1] \cap [T = k])$  pour tout entier  $k \geq 3$ .

5. Soit  $j$  un entier tel que  $j \geq 2$ .

(a) Calculer  $P([U = j] \cap [T = j + 1])$ .

(b) Que vaut  $P([U = j] \cap [T = k])$  pour tout entier  $k \geq 2$  tel que  $k \neq j + 1$  ?

6. Les variables aléatoires  $T$  et  $U$  sont-elles indépendantes ?

7. Calculer  $P(U = 1)$  puis déterminer la loi de  $U$ .