Durée: 4 heures Samedi 17 février 2018

Aucune sortie (même temporaire) autorisée pendant la première heures et le dernier quart d'heure

DS n°4 Bis

Aucun matériel ni documents autorisés. N'oubliez pas vos objectifs personnels. Relisez vos réponses et encadrez vos résultats. Le sujet comporte 3 pages !

Rappels des compétences	Rigueur/Auto-correction et rédaction
Ne pas écrire "d'horreur"	Essayez un maximum de question
Pas d'erreur de calculs	Français / rédaction / présentation

Exercice 1 - Série

1. Calculer en justifiant soigneusement leur convergence les séries suivantes :

$$A = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}}, \qquad B = \sum_{n\geqslant 2} \frac{2^{n-1}}{n!}, \qquad C = \sum_{n\geqslant 0} (n^2 - n)2^{-2n}.$$

2. Donner (en justifiant) la nature des séries :

$$D = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}, \qquad E = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}-1}, \qquad F = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^5},$$

Exercice 2A - Fonctions et suites (ECRICOME ECT 2013) - (*)

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[j, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0 \in [1, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Étude de $(u_n)_{n\geq 0}$.
   (a) Soit $x \geq 1$. Établir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \dfrac{x+1}{2}$.
   (b) Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \leq \dfrac{u_n+1}{2}$.
   (c) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 1)$.
   (d) Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et donner la valeur de sa limite.

2. Asymptote à $\mathscr{C}_f$.

   On pose $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$.

   (a) Donner la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Calculer a et b.

   (c) Montrer qu'il existe un réel c tel que :

   $$\forall x \in [1, +\infty[,\ f(x) - ax - b = \frac{c}{2x-1}$$

   et donner la valeur de c.

   (d) Prouver que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote $(\mathscr{D})$ dont on donnera une équation ainsi que la position de $(\mathscr{D})$ par rapport à $\mathscr{C}_f$.

3. Variations de f.

   (a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

   (b) Préciser le sens de variations de f sur $[1, +\infty[$.

   (c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite $(\mathscr{D})$ et la tangente $(\mathscr{T})$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

4. Étude d'une réciproque.

   (a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

   (b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnue x) admet des solutions réelles et les donner.

   (c) Soit $t \in [1, +\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$.

Exercice 3A - Matrices - (*)

1. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

2. (a) Calculer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire les solutions du système linéaire: $\begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ -x + 2y - z & = 2 \\ x - y + z & = 1 \end{cases}$.

3. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} (2-\lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?

   (b) Résoudre le système selon les valeurs de λ.

Exercice 4A - Probabilités (EMLyon 1991) - (**)

Une urne contient p jetons numérotés de 1 à p ($p \geq 2$). On effectue N tirages successifs ($N \geq 1$): chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne.

Pour tout entier i compris entre 1 et p, on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit:

- F_i est le nombre de fois où le jeton numéroté i a été tiré
- X_i prend la valeur 0 si le jeton numéroté i n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si le jeton numéroté i a été tiré au moins une fois.

1. **Étude des variables aléatoires F_i.**

   (a) Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i .

   (b) On considère la variable aléatoire $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

   Que vaut F ? Calculer l'espérance et la variance de F.

   (c) Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes ?

2. **Étude des variables aléatoires X_i.**

   (a) Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.

   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et p.

   Déterminer la probabilité pour que $X_i = 0$ sachant que $X_j = 0$.

   Est-ce que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes ?

   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

3. **Application**

   Vous êtes responsable du service après-vente d'une chaîne de magasins. Ce service est présent sur quinze sites et, au total, il reçoit en moyenne cinquante appels par jour.

   (a) En utilisant le début de l'exercice pour modéliser cette situation, donner une interprétation des variables aléatoires F_i, X_i et X.

   (b) Calculer des valeurs approchées à 10^{-1} près de l'espérance de F_i, de l'espérance de X_i et de l'espérance de X.

   Commenter brièvement ces résultats .