Durée: 4 heures Lundi 5 février 2018

Aucune sortie (même temporaire) autorisée pendant la première heures et le dernier quart d'heure

DS n°4

Aucun matériel ni documents autorisés. N'oubliez pas vos objectifs personnels. Relisez vos réponses et encadrez vos résultats. Le sujet comporte 6 pages !

Rappels des compétences	Rigueur/Auto-correction et rédaction
Ne pas écrire "d'horreur"	Essayez un maximum de question
Pas d'erreur de calculs	Français / rédaction / présentation

Rappel des règles: Ce sujet est double. Vous devez à chaque fois choisir entre 2 exercices, c'est à dire que vous **ne devez pas** faire deux exercices portant le même numéro (le second exercice ne sera pas corrigé). Enfin, chaque exercice possède un niveau de difficulté (*, **, ***). Les exercices plus difficiles seront notés sur plus de points. Selon vos résultats lors du précédent SIGMA, vous devez choisir des exercices pour un nombre **minimum** d'étoiles. Voici un récapitulatif des exercices :

- Exercice 1A - Séries - (*) ou Exercice 1B - Séries - (**)
- Exercice 2A - Fonctions et suite - (*) ou Exercice 2B - Fonctions et suite - (**)
- Exercice 3A - Matrices - (*) ou Exercice 3B - -(***)
- Exercice 4A - Probabilités - (**) ou Exercice 4B - Probabilités - (***)

Rappel du nombre d'étoiles minimum à choisir par élève :

10 * minimum	Martin
9 * minimum	Lola, Bela, Adrien, Corentin
8 * minimum	Louise, Mathilde G., Ugo, Arnaud, Zacharie
7* minimum	Flora, Lucas, Océane, Loïc, Clara
6* minimum	Thomas, Chloe, Justine, Charlotte, Illona, Pauline
5* minimum	Ceux qui reste

Exercice 1A - Série - (*)

1. Calculer en justifiant soigneusement leur convergence les séries suivantes :

$$A = \sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n}{2^{2n+1}}, \qquad B = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n!}, \qquad C = \sum_{n\geqslant 0} (n^2+n)e^{-n}.$$

2. Donner (en justifiant) la nature des séries :

$$D = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad E = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}, \qquad F = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^6},$$

Exercice 1B - Série (Exrait EML 2002) - (**)

Calculs de Somme

Calculer en justifiant soigneusement leur convergence les séries suivantes :

$$A = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)2^{2n+1}}{5^n}, \qquad B = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!3^{2n}}, \qquad C = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 3^n e^{-3}}{n!}.$$

Extrait de EML 2002

On admet, pour tout entier k et pour tout $x \in [0,1[$ que la série $\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

1. Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

2. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $k < n$, montrer :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

3. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

4. Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1[\qquad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Exercice 2A - Fonctions et suites (ECRICOME ECT 2013) - (*)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2};$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3;$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Étude du signe de g.
   (a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Donner les limites de g en $+\infty$ et en 0 (par valeur supérieure).
   (c) Construire le tableau de variation de g.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Étude asymptotique de f.
   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.
   (b) On note $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Calculer a et b.
   (c) Donner l'équation de l'asymptote (Δ) de $\mathscr{C}_f$ quand x tend vers $+\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $\mathscr{C}_f$.
3. Représentation graphique de f.
   (a) Déterminer la dérivée de f.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui ci les limites.
   (c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathscr{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote (Δ).
4. Étude d'une équation. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation
   $$(\varepsilon_n) : f(x) = 2n.$$
   (a) Prouver que l'équation (ε_n) admet une unique solution. On note x_n cette solution.
   (b) Montrer que
   $$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$
   (c) Justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$.
   (d) Prouver que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   (e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Exercice 2B - Fonctions et suites (EDHEC 2003) - (**)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ puis montrer que f' est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$,

4. (a) Etudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x\,e^x - e^x + 1$

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

   On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.

6. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.

   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

7. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

8. On pose $v_n = \ln\left(\dfrac{1-e^{-u_n}}{u_n}\right)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge et donner sa somme. (On pourra remarquer que $v_n = f(-u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

9. (a) Recopier et compléter cette fonction scilab qui prend en entrée un nombre réel x et donne en sortie la valeur $f(x)$.

```
function y = f(x)
    if  ....... then
        ... = 0
    else
        ... = log( ...... / .....)
............
```

   (b) Écrire un programme en Scilab permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$. (On pourra utiliser la fonction f précédemment définie.)

Exercice 3A - Matrices - (*)

1. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

2. (a) Calculer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire les solutions du système linéaire: $\begin{cases} 1x+4y+z & =1 \\ 3y+2z & =2 \\ 2x+2y & =1 \end{cases}.$

3. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x+y=0 \\ 4x-(2+\lambda)y=0 \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?

(b) Résoudre le système selon les valeurs de λ.

Exercice 3B - Matrices (ESSEC 2007 modifié) - (***)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0=1,\ v_0=0,\ w_0=0$$

et les relations de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1}=3u_n-v_n+w_n \\ v_{n+1}=u_n+2v_n \\ w_{n+1}=v_n+w_n \end{cases}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Reconnaître, pour tout entier naturel n le produit AX_n.

   (b) Montrer par récurrence que $X_n=A^nX_0$.

2. (a) Démontrer que le système (E_λ) : $\begin{cases} (3-\lambda)x-y+z & = & 0 \\ x+(2-\lambda)y & = & 0 \\ y+(1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$ est de Cramer si et seulement si $\lambda \neq 2$.

   (b) Déterminer les solutions du système lorsque $\lambda=2$.

3. On introduit les matrices

$$T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

   (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :

$$T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

   (c) Montrer que $T=P^{-1}AP$. Calculer alors A^n.

   (d) Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 4A - Probabilités (ECRICOME 2002) - (**)

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Étude du cas $c = 0$

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

- $Y = k$ si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au $k^{ième}$tirage.
- $Y = 0$ si les n boules tirées sont noires.

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

- $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au ième tirage.
- $X_i = 0$ sinon.

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

6. Soit $p \leqslant n-1$.

   (a) Déterminer $P(X_{p+1}=1\,/Z_p=k)$ pour $k \in Z_p\,(\Omega)$.

   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1}=1)=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$

   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Exercice 4B - Probabilités (ESCP 2003) - (***)

Soit a, b deux entiers naturels non nuls et s leur somme.
Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches indiscernables au toucher.
On effectue dans cette urne une suite infinie de tirages au hasard d'une boule selon le protocole suivant:

- si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est noire, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

Avant chaque tirage, l'urne contient donc toujours s boules.
On désigne par $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé qui modélise cette expérience et, pour tout entier naturel n non nul, on note:

- B_n l'événement "la n-ième boule tirée est blanche ";
- X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages;
- u_n l'espérance de la variable aléatoire X_n, c'est-à-dire $u_n=\mathbf{E}(X_n)$.

1. **Étude d'un ensemble de suites**
   Soit A l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de réels qui vérifient:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s\,x_{n+1}=(s-1)\,x_n+b+n$$

   (a) Soit α et β deux réels et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n=\alpha\,n+\beta$.
   Déterminer en fonction de b et de s les valeurs de α et β pour que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ appartienne à A.

   (b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite appartenant à A, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite déterminée à la question précédente et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n=x_n-v_n$.
   Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et expliciter, pour tout entier naturel n non nul, y_n puis x_n en fonction de x_1, b, s et n.

2. **Expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{n+1})$ à l'aide de u_n**

   (a) Donner, en fonction de b et de s, les valeurs respectives de la probabilité $\mathbf{P}(B_1)$ et du nombre u_1.

(b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(B_2)$ et vérifier l'égalité: $\mathbf{P}(B_2) = \dfrac{b+1-u_1}{s}$.

(c) Soit n un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant a$. Montrer que, pour tout entier k de l'intervalle $[0,n]$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_{n+1})$ est égale à $\dfrac{b+n-k}{s}$

En déduire l'égalité: $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$

(d) Soit n un entier naturel vérifiant $n > a$.
Si k est un entier de l'intervalle $[0, n-a-1]$, quel est l'événement $[X_n = k]$?
Si k est un entier de l'intervalle $[n-a, n]$, justifier l'égalité : $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$

Montrer enfin que l'égalité $\mathbf{P}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-u_n}{s}$ est encore vérifiée.

3. **Calcul des nombres u_n et $\mathbf{P}(B_n)$**

(a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier k de l'intervalle $[n+1-a, n]$ l'égalité :

$$\mathbf{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{a-n+k}{s}\mathbf{P}([X_n = k]) + \frac{b+n-k+1}{s}\mathbf{P}([X_n = k-1])$$

Vérifier cette égalité pour $k = n+1,\ k = n-a$ et pour tout entier k de l'intervalle $[1, n-a-1]$.

(b) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à l'ensemble A étudié dans la question 1

(c) Donner, pour tout entier naturel n non nul, les valeurs de u_n et de $\mathbf{P}(B_{n+1})$ en fonction de b, s et n.

(d) Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathbf{P}(B_n))_{n\geqslant 1}$?