

Durée: 4 heures

Lundi 11 Décembre 2017

Aucune sortie (même temporaire) autorisée pendant la première heure et le dernier quart d'heure

Devoir Surveillé n°3

Aucun matériel ni documents autorisés

Cherchez un maximum de questions et répondez même si vous n'êtes pas sur de la réponse.

Relisez vos réponses et encadrez vos résultats. Le sujet comporte 4 pages !

Rappels des compétences (5 points)	Rigueur/Auto-correction et rédaction
Ne pas écrire "d'horreur"	Essayez un maximum de question
Pas d'erreur de calculs	Français / rédaction / présentation

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n),$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \rightarrow x(2 - x)$.
2. (a) Montrer par récurrence que , pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.
 (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 (c) En déduire que la suite est convergente. Calculer sa limite.
3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = 1 - u_n$$

- (a) Exprimer pour tout entier n , v_{n+1} en fonction de v_n .
 - (b) En déduire (par récurrence), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = (1 - a)^{2^n}$.
 - (c) Déterminer la limite de la suite (v_n) . Retrouver la limite de la suite (u_n) .
4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps $t = 0$), la machine à café a une probabilité a d'être cassé ($0 < a < 1$). On notera A_n l'événement "la machine est cassé au temps $t = n$ " et $p_n = p(A_n)$. Si la machine est cassé au temps $t = n$ elle reste cassé au temps $t = n + 1$. Si la machine est en état de marche au temps $t = n$, elle a la probabilité p_n d'être cassé au temps $t = n + 1$.
 - (a) Calculez p_1
 - (b) Écrire p_{n+1} en fonction de p_n .
 - (c) En déduire p_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Que pensez vous de ce résultat ?

Exercice 2 (ECRICOME 2011)**PARTIE I. Un jeu en ligne.**

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H , V , D , N par :

- H : "les trois jetons sont alignés horizontalement" .
- V : "les trois jetons sont alignés verticalement" .
- D : "les trois jetons sont alignés en diagonale" .
- N : "les trois jetons ne sont pas alignés" .

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $P(H)$, $P(V)$, $P(D)$ des événements H , V , D .
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à :

$$P(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.
 - (a) Pour chaque entier naturel i non nul, on note Z_i le gain de la société à la $i^{\text{ème}}$ relance. Calculer l'espérance mathématique $E(Z_i)$ de Z_i .
 - (b) Quel gain journalier Z la société peut-elle espérer ?

PARTIE II. Cas de joueurs invétérés.

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.
 - (a) Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées.
 - (b) Indiquer l'espérance et la variance de X .
 - (c) Exprimer la perte T du joueur en fonction de X .
2. Quel nombre minimum n de parties devrait-il jouer pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure ou égale à 50% ? (On admettra que $\ln\left(\frac{19}{21}\right) \simeq -0,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$)

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement "la fonction aléatoire est dérégulée" et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P_{\Delta}(H)$, $P_{\Delta}(V)$, $P_{\Delta}(D)$ des événements H, V, D sachant l'événement Δ .
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(\Delta, \bar{\Delta})$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à :

$$P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}$$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x , que la fonction aléatoire ait été dérégulée ?

Exercice 3 (ECRICOME 2004)

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2. On admettra le résultat suivant utile pour la partie 2 :

$$\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$$

PARTIE I. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Écrire un programme scilab permettant de trouver l'inverse de P .
2. Montrer que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = Q$
3. On pose $T = P A P^{-1}$.

(a) Calculer la matrice T

(b) Calculer T^2 , T^3 , puis T^n pour tout entier naturel $n \geq 3$.

4. En déduire que :

$$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$

où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

5. Pour tout réel t , on définit la matrice $E(t)$ par :

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$

où I désigne la matrice unité (identité) d'ordre 3.

(a) Montrer que :

$$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t) E(t') = E(t + t')$$

(b) Pour tout t réel, calculer $E(t) E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de I , A , A^2 , t .

(c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n , déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de I , A , A^2 , t et n .

PARTIE II. Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t , on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que Q est inversible et donner son inverse.

2. En déduire que

$$Q^{-1} B Q = D$$

3. Pour tout entier naturel n , montrer que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}$$

exprimer de même $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ sous le forme d'une somme.

5. Déterminer les limites de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Pour tout t réel, on pose alors :

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(t) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n(t) & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(t) \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que

$$E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer les matrices E_1 et E_2 , telles que pour tout t réel on ait :

$$E(t) = e^t E_1 + e^{2t} E_2$$

(c) Calculer E_1^2 , E_2^2 , $E_1 E_2$, $E_2 E_1$.

(d) En déduire que pour tout t réel, $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse.