

Durée: 4 heures

Lundi 9 Octobre 2017

Aucune sortie autorisée pendant les 2 premières heures et le dernier quart d'heure

## Devoir Surveillé n°2

Aucun matériel ni documents autorisés

Cherchez un maximum de questions et répondez même si vous n'êtes pas sûr de la réponse.

Relisez vos réponses et encadrez vos résultats. Le sujet comporte 4 pages !

### Exercice 1 (4 points)

Calculer les sommes suivantes et donner une écriture factorisée la plus simple possible :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^2, \quad B_n = \sum_{k=1}^n k(k-1) \quad C_n = \sum_{k=2}^n q^k$$

### Exercice 2 (21 points)

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ .

#### A. Étude sur $]0, +\infty[$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de  $f$ .  
 (b) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Montrer que  $f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$  et déterminer son signe.
2. (a) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}$ .  
 (b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
 (c) Déterminer la limite de  $f$  en 0 par valeur strictement supérieure.
3. En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ . Déterminer le signe de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
4. Primitives de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .  
 (a) Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction  $g$  définie par:

$$g(x) = \ln(e^{2x} - 1) - x.$$

- (b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- (c) Déterminer le sens de variation de  $g$  et sa limite en 0 par valeur supérieure.
- (d) En écrivant  $e^{2x} - 1 = e^{2x}(1 - e^{-2x})$ , déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- (e) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution sur  $]0, +\infty[$ .

#### B. Construction de $\mathcal{C}$ , la courbe représentative de $f$ .

1. Montrer que pour tout  $x$  non nul,  $f(x) + f(-x) = 0$ . En déduire les symétries de  $\mathcal{C}$ .
2. Calculer  $f(\ln(3))$  et  $f'(\ln(3))$  (on donnera leur valeur exacte). Donner l'équation de la droite  $\Delta$  tangente à la courbe en  $x = \ln(3)$ . Construire la droite  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$ . On donne les valeurs approchées:

$\ln(3)$	5/4	9/16	9/32
1,1	1,2	0,6	0,3

**Exercice 3 (9 points)**

Pour chacun des trois ensembles suivants, dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Attention on comptera +1 pour une bonne réponse, 0 pour une absence de réponse et -1 pour une mauvaise.

	$A = \{0, 1, 2\}$	$A = ]-\infty; 2] \cap \mathbb{Z}$	$A = [2; +\infty[ \cup \mathbb{Z}$
$\forall x \in A, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$			
$\exists x \in A, \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$			
$\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in A, y < x$			

**Exercice 4 (7 points)**

Dans tout l'exercice  $n \in \mathbb{N}$ . Le but de cet exercice est de montrer que :  $\sqrt{n^2 + 1}$  est un entier  $\Leftrightarrow n = 0$ .

- Prouver d'abord l'implication  $n = 0 \implies \sqrt{n^2 + 1}$  est un entier.
- On veut démontrer la proposition :  $a, b \in \mathbb{N}, ab = 1 \implies a = 1$  et  $b = 1$ .
  - Écrivez la contraposée et la négation de cette implication.
  - Montrer que si  $a \in \mathbb{N}, ab = 1$  et  $a \neq 1$  alors  $b$  n'est pas un entier.
  - Grâce à un raisonnement par l'absurde, conclure que  $a, b \in \mathbb{N}, ab = 1 \implies a = 1$  et  $b = 1$ .
- On va désormais montrer l'implication :  $\sqrt{n^2 + 1}$  est un entier  $\implies n = 0$ . On suppose donc que  $\sqrt{n^2 + 1}$  est un entier et on pose  $\sqrt{n^2 + 1} = p \in \mathbb{N}$ .
  - Montrer que :  $(p - n)(p + n) = 1$ .
  - Montrer que  $(p - n)(p + n) = 1 \implies n = 0$  et  $p = 1$  et conclure.

**Exercice 5 (4 points)**

Les exercices suivants sont indépendants. Vous justifierez du mieux que vous pourrez vos réponses.

- Soit  $E = \{0, 1\}$ . Déterminer  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  (on demande d'écrire toutes les parties de  $E$ ).
- On a 3 urnes différentes. Dans la première, il y a 4 boules jaunes numérotées de 1 à 4. Dans la seconde il y a 6 boules rouges numérotées de 1 à 6. Dans la troisième il y a 3 boules vertes numérotées de 1 à 3. On tire une boule dans chaque urne. Combien y a-t-il de résultats possible pour cette expérience ?
- Au loto, on tire 6 boules d'une urne qui en contient 49. Combien y a-t-il de tirages possibles ? (On ne demande pas un résultat numérique. Laissez le résultat sous forme de formule).
- En final du 400 m, 8 coureuses sont sur la ligne de départ. Combien de combinaison de podium sont possibles ?

**Exercice 6 (Inspiré de ESLSCA-ISC 1999 - 34 points )**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**A) Étude de la suite  $u$ .**

1. Étude de  $f$ .
  - (a) Étudier le domaine de définition de  $f$ .
  - (b) Étudier les variations de  $f$  et préciser la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
  - (c) Résoudre l'équation  $f(x) = x$  et l'inéquation  $f(x) > x$ . (On admettra que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$ )
  - (d) Tracer la courbe représentative de  $f$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .
2. Dans cette partie on suppose que  $u_0 = 0$ .
  - (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est bien définie et  $u_n \geq 0$ .
  - (b) Montrer que la suite  $u$  est croissante et majorée par 1. (Indication : On pourra montrer par récurrence la proposition  $\mathcal{P}_n : \{1 \geq u_{n+1} \geq u_n\}$ )
3. Dans cette partie on suppose que  $u_0 > 1$ .
  - (a) Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est bien définie et  $u_n \geq 1$ .
  - (b) Montrer que la suite  $u$  est monotone.

**B) Calcul de  $u_n$  en fonction de  $n$  quand  $u_0 > 1$ . On suppose désormais que  $u_0 > 1$** 

1. Étude de fonctions auxiliaires. On définit les fonctions cosinus hyperbolique (ch) et sinus hyperbolique (sh) par  $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
  - (a) Exprimer la dérivée des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
  - (b) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\text{ch}(x) > 0$ , calculer  $\text{sh}(0)$  et déterminer le signe de  $\text{sh}(x)$ .
  - (c) Donner la limite de ch en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
  - (d) En déduire qu'il existe un unique réel  $\alpha > 0$  tel que  $\text{ch}(\alpha) = u_0$ .
2.
  - (a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $2\text{ch}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \text{ch}(x)$ .
  - (b) En déduire que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \text{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ . (on vérifiera la condition initiale et que pour tout  $n$  entier,  $u_{n+1} = f(u_n)$ ).

**Exercice 7 (EDHEC 2001 - 21 points)****Partie 1**

On pose, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Écrire un script (dans le langage courant ou le langage de votre choix (TI, Scilab) permettant de demander à l'utilisateur d'entrer un nombre  $n$  et qui renvoie  $v_n$ . Vous organiserez votre programme selon 4 axes : Variables - Initialisation - Traitement - Sortie.
2. Montrer que :  $\forall k > 1, \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$  (Indication : pensez aux intégrales)
3. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \ln(n) + 1$ .

**Partie 2**

On considère une suite  $u$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et par la relation suivante, valable pour tout entier  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.  
(b) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Pour tout entier  $k$ , exprimer  $u_{k+1}^2 - u_k^2$  en fonction de  $u_k^2$ .  
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ .  
(c) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$ .
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

- (b) En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$