Durée: 2 heures Lundi 25 septembre 2017
Aucune sortie autorisée

Devoir Surveillé n°1

Aucun matériel ni documents autorisés
Cherchez un maximum de questions et répondez même si vous n'êtes pas sur de la réponse (à part pour l'exercice 2 !).
Celui ou ceux qui essaieront le plus de questions auront un point bonus.
Le sujet comporte 2 pages !

Exercice 1
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est paire;
2. f est strictement croissante;
3. f n'est pas la fonction nulle;
4. L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution
5. M est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. f n'est pas une fonction décroissante ;

Exercice 2
Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On ne demande pas de justification mais on comptera +1 pour une bonne réponse, -0,5 pour une mauvaise réponse et 0 pour une absence de réponse.

1. $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x > y$
2. $P_2 : \forall x, y \in \mathbb{N}, (x + y = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } y = 1)$
3. $P_3 : \forall x, y \in (\mathbb{R}^+), (x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0)$
4. $P_4 : \forall x \in \mathbb{R}, (x = 3 \Rightarrow x^2 = 9)$
5. $P_5 : \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 = 9 \Rightarrow x = 3)$
6. $P_6 : \exists \eta > 0, \forall \epsilon > 0, 0 \leq \eta \leq \epsilon$

Exercice 3
Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f par $f(x) = x^3 + 5x - 1$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f(0)$ et $f(1/2)$.
4. En déduire que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer par raisonnement direct que si $a \leq b$ alors $a \leq \dfrac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. Montrer en utilisant une disjonction de cas que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est un entier pair.

Exercice 5
Soit g la fonction définie par $g : x \to \ln(1 + x^2)$.

1. Déterminer son ensemble de définition puis son signe.
2. Dresser alors son tableau de variations.
3. Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
4. On fixe $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation d'inconnue x, $g(x) = y$ (on distinguera différents cas suivant la valeur de y).
5. En étudiant une fonction annexe, déterminer la position relative de la courbe représentative de g et de la droite d'équation $y = x$.
6. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g en faisant figurer la droite $y = x$.

Exercice 6 (Inspiré d'un sujet EDHEC 2000)

1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.
   On définit la fonction f par : $\forall x \in D, f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.
   On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
2. (a) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.
   (b) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis montrer que $\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
   (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer la droite (T). On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{\alpha} \simeq 2,2$.

Exercice 7
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer en utilisant la contraposée et un raisonnement par l'absurde que (on pourra utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel) :

$$\text{" Si } b \neq 0 \text{ alors } a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.\text{"}$$