Mardi 5 Septembre 2017 - Durée : 3h

Exercice 1 (Calcul littéral)
Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = 3x^3 - (x-2)(2x+3)(x-5)$.
2. $B = (2x+5)^2 - (4x+3)(2x+3)$.

Exercice 2 (Fractions)
Écrire sous la forme la plus simple possible.

1. $C = \frac{24}{18} \times \frac{81}{12} \times \frac{36}{27}$.
2. $D = -\frac{2x+4}{x} \times \frac{x}{-2x+4} \times \frac{2-x}{2+x}$.

Exercice 3 (Racines carrées)
Simplifier au maximum les expressions suivantes en faisant disparaître la racine carré du dénominateur le cas échéant:

1. $E = (\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)$.
2. $F = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

Exercice 4 (Puissances)
Simplifier les expressions au maximum

1. $G = 16(-4)^2 n$.
2. $H = 3^6 \times 5^4$.
3. $I = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$.

Exercice 5 (Équations)
Résoudre les équations suivantes par la méthode de votre choix.

1. $x^2 - 6x + 9 = 0$.
2. $(3x+1)^2 - 36 = 0$.
3. $(\ln(x) - 2)(4 - 5\ln(x)) = 0$.

Exercice 6 (Logarithme et exponentielle)
Simplifier les expressions suivantes

1. $J = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
2. $K = \ln\left(\frac{\sqrt{6}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{6}-1}{2}\right)$.

Exercice 7 (Inéquations)
Résoudre les inéquations suivantes par la méthode de votre choix.

1. $4x^2 + 2x \geq 0$
2. $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1}$.

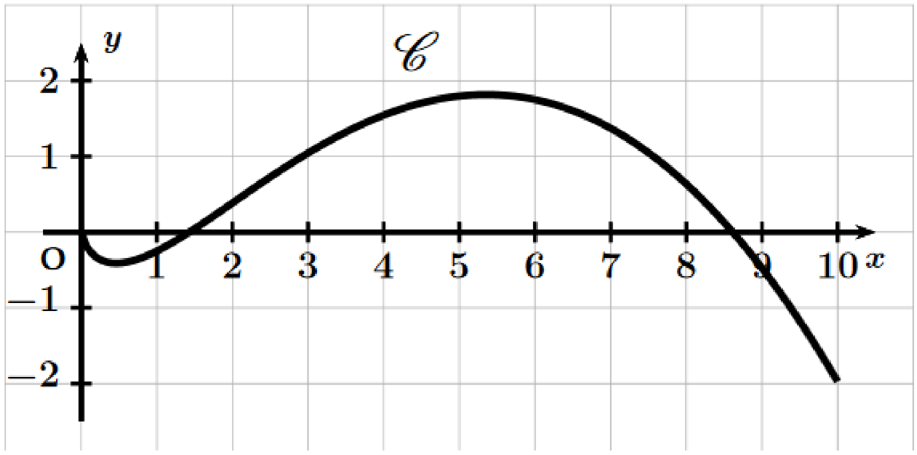
Exercice 8 (dérivées)
Donner les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \to \ln(x^4)$.
2. $g : x \to e^{1-ax}$.
3. $h : x \to (\sqrt{x}+1) \times (x^2 - 2)$.

Exercice 9 (QCM)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0;10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



1. Le nombre de solutions sur l'intervalle]0;10] de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

   (a) 1 (b) 2 (c) 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

   (a) nul (b) strictement positif (c) strictement négatif

3. La fonction f' est :

   (a) croissante sur]0;10] (b) croissante sur [4,7] (c) décroissante sur [4,7]

Exercice 10 (Problème)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé sur la page suivante.

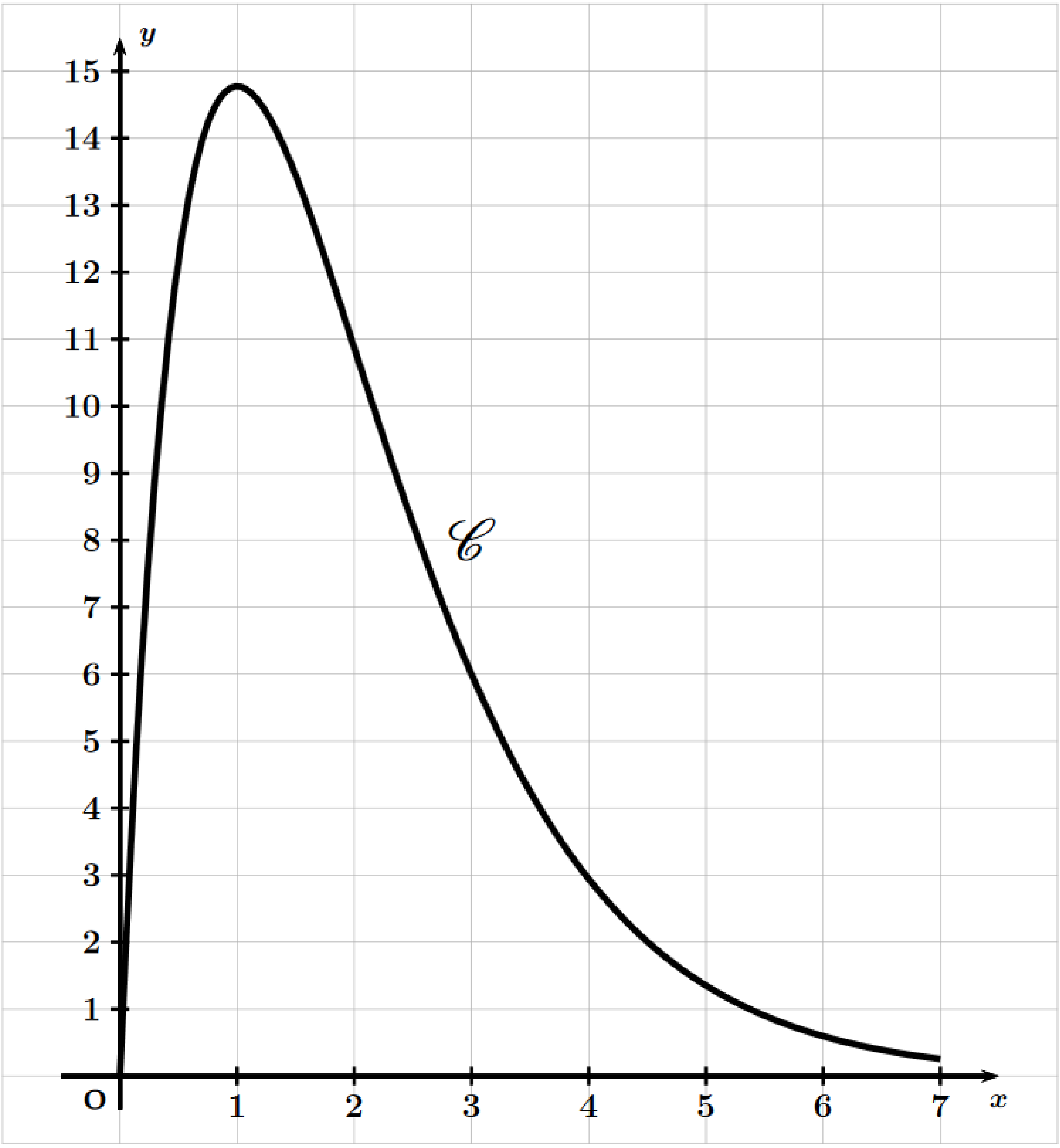
Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;7]$.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des solutions de l'équation $f(x) = 10$ sur l'intervalle $[0;7]$.

2. Donner le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$ et préciser la valeur en laquelle il est atteint.

3. La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)dx$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

   (a) $[9;17]$ (b) $[18;26]$ (c) $[27;35]$



Partie B

La courbe ci dessus est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [0;7] d'expression :

$$f(x) = 2xe^{-x+3}.$$

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;7]$, $f'(x) = (-2x+2)e^{-x+3}$.

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;7]$ puis en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.

   (b) Calculer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$.

3. Justifier que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0;7]$.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle [0;7] par :

$$F(x) = (-2x - 2)e^{-x+3}.$$

   (a) Justifier que F est une primitive de f su l'intervalle $[0; 7]$.

   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

   (a) Calculer la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près, lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets.

   (b) L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10000 euros. Déterminer le nombre d'objets possibles que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif.

Exercice 11 (Suites)

Le 1^{er} septembre 2016, un ensemble scolaire compte 3000 élèves. Une étude statistique interne a montré que chaque 1^{er} septembre :

- 10% de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1^{er} septembre de l'année $2016 + n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.9u_n + 250$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est est géométrique de raison $0,9$. Préciser v_0.

   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2500$.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. La capacité optimale d'accueil est de 2800 élèves. Ainsi, au 1^{er} septembre 2016, l'ensemble scolaire compte un sur-effectif de 200 élèves.

   Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sur-effectif.